INSTITUTO SUPERIOR UNIVERSITARIO COTOPAXI

GUÍA DE ESTUDIO

CÁLCULO

AUTOR
HERNÁN GARZÓN

Instituto Superior Universitario Cotopaxi

Matemática

Electromecánica

Guía de estudio

Franklin Hernán Garzón Vaca

Guía de estudio de Matemática
Electromecánica CEM-101
Franklin Hernán Garzón Vaca
2024

Esta publicación ha sido sometida a revisión interna y validación por parte de los jefes de área y coordinadores de carrera institucionales. Sin embargo, no ha completado su proceso total de editorialización.

Diseño de portadas: Raúl Jiménez Tello.

Versión 1.0
Instituto Superior Universitario Cotopaxi
Latacunga - Ecuador

Esta publicación está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Instituto Superior Tecnológico Cotopaxi

Nuestra Historia

El **Instituto Superior Tecnológico Cotopaxi** es un icono de la transformación y revalorización de las políticas públicas de **educación técnica y tecnológica** en el Ecuador en general y particularmente en el desarrollo de la **formación técnica de Cotopaxi.**

Razón de ser:

Misión:

Somos una institución de educación superior, orientada en la formación integral de profesionales de tercer nivel competentes e innovadores con compromiso ético, social y ambiental que fomentan el desarrollo territorial sostenible.

Visión

Ser un instituto superior universitario con altos estándares de calidad, referente de la transformación técnica y tecnológica que contribuya al desarrollo sustentable y sostenible de la sociedad.

Gestión de Actividades de aprendizaje

Componente docencia

Son actividades enfocas al alcance de las actitudes que permitan alcanzar los resultados de aprendizaje a lo largo del desarrollo de las unidades que conforman la guía de estudio, el mismo puede ser acompañado por el docente o en forma colaborativa.

Prácticas Aprendizaje:

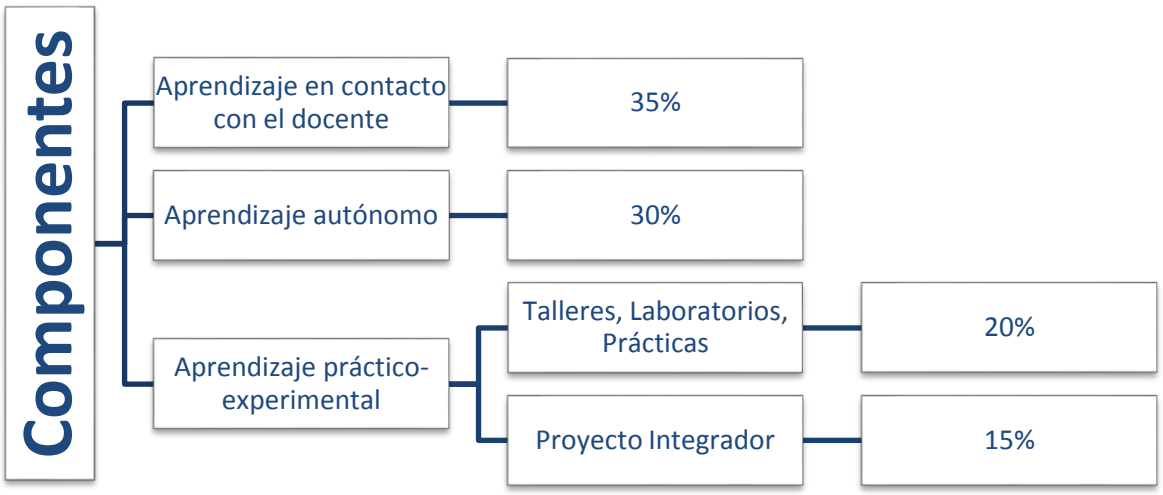
Son actividades que permiten que los estudiantes en contribución con su docente la consolidación de los resultados de aprendizaje en forma práctica, con el desarrollo y aplicación de conocimientos teóricos y métodos experimentales.

Componente Trabajo Autónomo:

Son actividades que permiten fortalecer las áreas específicas o amplias de conocimiento, a través de investigaciones bibliográficas, tareas o talleres. El estudiante organiza la forma y tiempo de las actividades a desarrollar.

Evaluación del Estudiante por Resultados de Aprendizaje

Criterios



Instrucciones generales

Estimado estudiante revisar este acápite es de importancia porque le permitirá observar la secuencialidad de los procesos de la asignatura de Estadística y Modelos Probabilísticos II; para que alcance un aprendizaje significativo durante su formación académica.
La guía de estudio será un uno de los medios de orientación y recurso para el aprendizaje de la asignatura de Estadística y Modelos Probabilísticos II. Cada unidad didáctica inicia con una breve introducción y el resultado de aprendizaje de la asignatura

Para realizar un diagnóstico de conocimientos el docente abrirá una discusión en grupos sobre una pregunta que parta de interrogantes significativas para los alumnos, esto permitirá conocer si el estudiante cuenta con conocimientos previos de la asignatura, sea por su formación escolar o por su experiencia cotidiana.

En las actividades de desarrollo tienen la finalidad para que el estudiante interaccione con una nueva información o con una serie de conocimientos previos en mayor o menor medida acerca del tema, estas fuentes de información pueden ser la exposición docente, discusión sobre una lectura, video relacionados al tema y apoyo de medios digitales como Moodle, Google Drive, BoxChrome, etc.

Las unidades de la guía de estudio deben estar desarrolladas en consecuencia con los resultados de aprendizaje, por tal motivo se recomienda seguir el orden en el que se encuentran.

Antes de iniciar el nuevo tema es importante haber comprendido la unidad anterior, caso contrario repase de nuevo o consulte a su profesor de la asignatura, quien le ayudara a clarificar los temas en los que tenga dificultad.

El tiempo para el desarrollo de la asignatura es de 08 semanas comprendidas en 48 horas de docencia, 32 horas de aprendizaje autónomo y 16 horas de aprendizaje práctico. Se recomienda al estudiante, programar un horario de estudio de cinco horas semanales como mínimo, para la asignatura.

La ponderación de las actividades que evaluarán durante el periodo serás calificadas sobre diez puntos *10/10*.

Para la evaluación de actividades de tareas e informes de prácticas de aprendizaje se revisará: originalidad, presentación *claridad, orden y fecha de entrega.* Desarrollo del documento o informe según las normas APA de la institución. Además, se realizarán evaluaciones de tareas en aula y autónomas como actividades expositivas, debates, análisis de casos, mediante una rubrica.

La síntesis del proceso de aprendizaje se realizará mediante la aplicación de un cuestionario al final de la guía de estudio, esta evaluación comprende las evidencias de aprendizaje significativo alcanzadas a lo largo del desarrollo de las actividades realizadas y permitirá hacer los ajustes pertinentes a la secuencia didáctica en función de los resultados obtenidos.

ÍNDICE

Información general. 5

Introducción. 9

Objetivos generales. 10

Capítulo 1 Álgebra Superior

1.1. Estructura de los números reales 12

1.1. Conjunto de números naturales 12
1.2. Conjunto de números enteros 12
1.3. Conjunto de números racionales 13
1.4. Conjunto de números irracionales 13
1.5. Potenciación 13
1.6. Leyes de los exponentes 13
1.7. Radicación 14
1.8. Leyes de los radicales 14
1.9. Productos y cocientes notables 15
1.10. Descomposición en factores 15
1.10.1. Factor común 15
1.10.2. Factor común por agrupamiento 16
1.10.3. Diferencia de cuadrados 17
1.10.4. Suma o diferencia de cubos 17
1.10.5. Trinomio cuadrado perfecto 18
1.10.6. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ 19
1.10.7. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ 20

TAREA N° 1 21

2. Fracciones algebraicas 22

2.1. Clases de fracciones 22
2.1.1. Fracciones propias 22
2.1.2. Fracciones impropias 23
2.1.3. Fracciones homogéneas 23
2.1.4. Fracciones heterogéneas 23
2.1.5. Fracciones irreducibles 23
2.1.6. Fracciones equivalentes 23

2.2. Signos de una fracción 23
2.3. Simplificación de fracciones 23
2.4. Álgebra de fracciones 24

TAREA N° 2 27

2.5. Racionalización . . . . . .
2.5.1. Factor racionalizante 28
29
TAREA N° 3 . . . . . .
29
3. Ecuaciones de primer grado y sistemas lineales . . . . . .
30
3.1. Ecuación . . . . . .
3.2. Ecuaciones lineales 30
3.2.1. Solución de ecuaciones lineales 30
3.3. Ecuaciones racionales 30
3.4. Ecuaciones irracionales 31
3.5. Ecuaciones de segundo grado 32
3.5.1. Ecuaciones incompletas 33
3.5.2. Ecuaciones completas 34
3.5.2.1. Por factorización 34
3.5.2.2. Fórmula general 35
35
TAREA N° 4 . . . . . .
37
4. Matrices y determinantes . . . . . .
4.1. Definición 38
4.2. Igualdad de matrices 38
4.3. Clases de matrices 39
4.3.1. Matriz transpuesta 39
4.3.2. Matriz triangular 40
4.3.3. Matriz identidad 40
4.4. Operaciones con matrices 40
4.4.1. Suma de matrices 40
4.4.2. Resta de matrices 40
4.4.3. Multiplicación de matrices 40
4.4.4. Matrices invertibles 41
4.5. Determinantes 42
4.5.1. Determinante de una matriz 2 x 2 44
4.5.2. Determinante de una matriz 3 x 3 44
4.5.3. Determinante de una matriz por el método del menor cofactor 44
4.6. Aplicaciones de las matrices 45
4.6.1. Regla de Cramer 46
4.6.2. Método de Gauss – Jordan 46
47
TAREA N° 5 . . . . . .
48
5. Fraciones parciales 50
5.1. Fracciones propias e impropias 50
5.2. Coeficientes indeterminados 50
5.3. Procedimiento para descomponer una fracción en fracciones parciales 50

INTRODUCCIÓN

La matemática constituye una base de particular importancia para el desarrollo de las sociedades. Sus leyes, axiomas y aplicaciones han permitido el desarrollo vertiginoso de la ciencia y la tecnología, sin embargo, la enseñanza de esta ciencia requiere de docentes altamente capacitados y de estudiantes comprometidos por alcanzar un conocimiento de bases sólidas.

Es tal su practicidad y aplicabilidad que la relación que se genera entre el hombre y la sociedad obedece a modelos matemáticos que explican el por qué y para qué el estudio de esta ciencia.

En este contexto, la enseñanza de la matemática juega un papel importante en la formación del profesional, por cuanto esta ciencia estimula las facultades mentales superiores de la persona, capacitándola para resolver problemas no sólo en el ámbito del razonamiento matemático sino también en otras ciencias y en su la vida diaria.

El presente texto de trabajo de ninguna manera pretende ser una obra completa de matemática, sino más bien un aporte para maestros y estudiantes, como un recurso didáctico para optimizar el proceso de aprendizaje de esta área de estudio.

Se ha tratado de estructurar un programa sencillo que permita al estudiante del Instituto Superior Tecnológico Cotopaxi, responder con criterio propio, lo importante del estudio de la matemática y por otro lado se inserte en el manejo de las técnicas elementales que se utilizan en los cálculos matemáticos, algebraicos, geométricos y trigonométricos.

El propósito del texto es ayudar al estudiante de la carrera, para que enfrente en excelentes condiciones los retos que se presenten en su vida estudiantil y profesional.

OBJETIVOS GENERALES

- Reconocer la importancia de la matemática como instrumento básico para la organización, sistematización, inferencia y validación de los conocimientos en las diversas disciplinas científicas y tecnológicas..

- Comprender y aplicar conceptos y los procesos que permitan el uso del álgebra superior en problemas prácticos de la carrera.

- Comprender los principios y leyes del cálculo diferencial e integral para aplicarlos en la resolución de problemas práticos de la especialidad que desea seguir.

PRIMER PARCIAL

UNIDAD I

ÁLGEBRA SUPERIOR

1. Estructura de los números reales

Para definir la estructura de los números reales, debemos analizar cada uno de los subconjuntos que lo conforman:

1.1. Conjunto de los números Naturales $(\mathbb{N})$[1]

Este conjunto se define a partir de tres axiomas fundamentales llamados axiomas de *Peano*; cuyos enunciados son los siguientes:

Todo número natural tiene un número que le antecede. *Ej.*

- El número que le antecede al uno es el cero
- El número que le antecede al dos es el uno
- El número que le antecede al noventa y nueve es el noventa y ocho…

Ejemplo: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 . . .

a) El cero no tiene su anterior, este número se le conoce con el nombre de Elemento Neutro.

b) Todo número anterior es menor que el posterior. *Ej.*

$$0 < 1 \qquad 1 < 2$$

$$2 < 3 \qquad 3 < 4 \ldots$$

1.2. Conjunto de los números Enteros $(\mathbb{Z})$

Es una extensión del conjunto de los números $\mathbb{N}$, que se origina por la imposibilidad de realizar la siguiente operación:

$$a - b; \quad b > a \qquad \text{Ejemplo: } 5 - 9 = -4$$

1.3. Conjunto de los números Racionales $(\mathbb{Q})$

Es una extensión del conjunto de los números $\mathbb{Z}$ y que se originan por la imposibilidad de realizar la siguiente operación:

$$a \div b = c; \; c \notin \mathbb{Z} \qquad \text{Ejemplo: } 5 \div 2 = 2.5$$

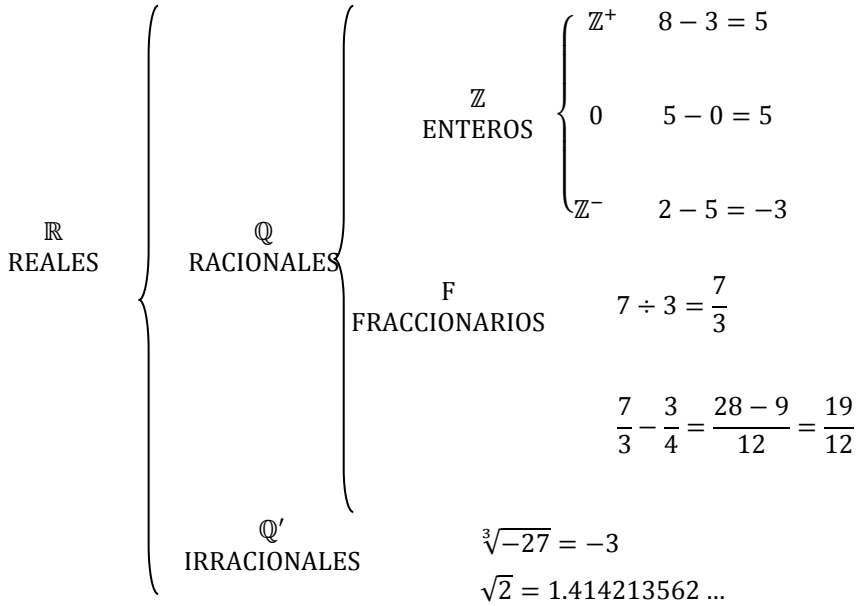
[1] Notación de los conjuntos que conforman los números reales

1.4. Conjunto de los números Irracionales $(\mathbb{Q}')$

Es una extensión de los números $\mathbb{Q}$, que se originan por la imposibilidad de realizar la siguiente operación:

$\sqrt{a} = b;\ b \notin \mathbb{Q}$ Ejemplo: $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$

El conjunto de los números Reales queda entonces establecido de la siguiente manera:



1.5. Potenciación

La potenciación es una operación de composición en la que dados dos números llamados base y exponente, debemos encontrar un número llamado potencia; siendo su generalización la siguiente:

$$a^m = P$$

Donde
$a = \text{base}$
$m = \text{exponente}$[2]
$P = \text{potencia}$

1.6. Leyes de los exponentes

Propiedad	Ejemplo
$a^1 = a$	$3^1 = 3$
$a^0 = 1$	$7^0 = 1$
$(-a)^m = a^m$; m ∈ números pares	$(-5)^2 = 25$

[2] El exponente indica cuántas veces debemos multiplicar la base

$(-a)^n = -a^n$; n ∈ números impares	$(-3)^3 = -27$
$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$	$5^{-3} \times 5^4 \times 5^2 = 5^{-3+4+2} = 5^3$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$5^4 \div 5^2 \div 5^{4-2} = 5^2$
$\left(\frac{a \times b}{c}\right)^n = \frac{a^n \times b^n}{c^n}$	$\left(\frac{2 \times 3}{5}\right)^2 = \frac{2^2 \times 3^2}{5^2}$
$((a)^m)^n = a^{m \times n}$	$((3)^{-2})^{-3} = 3^{-2 \times -3} = 3^6$
$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

1.7. Radicación

La radicación es una operación en la que dados dos números llamados índice y cantidad subradical, debemos encontrar otro número llamado potencia; siendo su generalización la siguiente:

$$\sqrt[n]{a} = R$$

Donde

a = cantidad subradical
n = índice
R = raíz

La radicación se define en base al siguiente *principio*: Toda raíz implica un exponente fraccionario y recíprocamente, todo exponente fraccionario implica una raíz. *Ej.*

$$\sqrt[m]{a^m} = a^{m/n} \qquad 3^{5/2} = \sqrt[2]{a^5}$$

1.8. Leyes de los radicales

Propiedad	**Ejemplo**
$\sqrt[mn]{a^m} = a^n$	$\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$
$\sqrt[n]{-a} = -a^{1/n}$; n *es impar*	$\sqrt[3]{-8} = -2$
$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8}$
$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$	$\sqrt[3]{4} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \div 2} = \sqrt[3]{2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[6]{5}$

1.9. Productos y Cocientes notables

Son reglas que ayudan a obtener directamente el resultado de ciertas multiplicaciones y divisiones algebraicas; entre las más utilizadas tenemos:

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

REGLA	EJEMPLO
1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	$(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(7x + 5y)(7x - 5y) = 49x^2 - 25y^2$
4) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + 7)(x - 10) = x^2 - 3x - 70$
5) $(ax + b)(cx + d) = acx^2(ad + bc)x + bd$	$(3x - 2)(5x + 7) = 15x^2 + 11x - 14$
6) $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$	$\frac{25x^2 - 49y^2}{5x + 7y} = 5x - 7y$
7) $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$	$\frac{27x^3 + 8y^3}{3x + 2y} = 9x^2 - 6xy + 4y^2$
8) $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$	$\frac{64x^3 - 125y^3}{4x - 5y} = 16x^2 + 20xy + 25y^2$

📖**Recuerde:** Reforzar las reglas que se detallan en esta tabla, le ayudará a resolver los problemas que se presenten en las unidades siguientes.

1.10. Descomposición en Factores

Descomponer en factores un polinomio significa expresarlo, en forma de *producto* de dos o más polinomios de menor grado que el original.

Para su estudio, los casos de factoreo se dividen en:

1.10.1. Factor común (regla de oro del factoreo)

Forma de reconocerlo

El polinomio puede tener dos o más términos y en todos debe repetirse al menos un número u una letra.

El factor común numérico es el máximo común divisor y de las letras, las que se repiten de menor exponente.

Formula

$$ax + bx - cx - dx = x(a + b - c - d)$$

Observe que la letra que se repite es “x” por lo tanto esa letra es el *factor común* y el polinomio queda expresado como un producto.

Ejercicios Resueltos

i. $5x^3 + 15x^2 - 30x = 5x(x^2 + 3x - 6)$

ii. $24m^3n^2 - 36m^2n^3 + 12mn = 12mn(2m^2n - 3mn^2 + 1)$

Ejercicios Propuestos

i. $5a^2x - 60b^2x + 5ax =$ _____

ii. $2y(a - 1) - 3a(a - 1) =$ _____

iii. $ax^3 - 2ax^2 - 3ax =$ _____

iv. $a(x + y) + b(x + y) =$ _____

v. $abc + abd =$ _____

1.10.2. Factor común por agrupamiento

Forma de reconocerlo

El polinomio debe tener 4, 6, 8, 9, etc. términos de tal forma que los podamos agrupar de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc., en base a ciertos parámetros indicadores.

Fórmula

$$\begin{aligned} ax + bx - ay - by &= (ax - ay) + (bx - by) && \text{agrupamos los términos} \\ &= a(x - y) + b(x - y) && \text{sacamos factor común} \\ &= (x - y)(a + b) && \text{factor común} \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

i. $$\begin{aligned} xy + 2x + y + 2 &= (xy + 2x) + (y + 2) \\ &= x(y + 2) + 1(y + 2) \\ &= (y + 2)(x + 1) \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} x^3 - 2ax^2 - 4a + 2x &= (x^3 - 2ax^2) + (2x - 4a) \\ &= x^2(x - 2a) - 2(x - 2a) \\ &= (x - 2a)(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

i. $10z^2m - 6ym + 15z^2 - 9y =$ _____

ii. $x^3 - x^2 + x - 1 =$ _____

iii. $x^3 - 2ax^2 - 2a + x =$ _____

1.10.3. Diferencia de cuadrados

Forma de reconocerlo

El polinomio tiene dos términos *cuadrados perfectos*[3] separados por el signo menos.

Fórmula

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejercicios resueltos

i. $25x^2 - 16y^2 = (5x + 4y)(5x - 4y)$

ii. $4e^{2x} - 9e^{4x} = (2e^x - 3e^{2x})(2e^x + 3e^{2x})$

iii. $9(x + 1)^2 - 4(x - 1)^2 = [3(x + 1) - 2(x - 1)][3(x + 1) + 2(x - 1)]$
$= [3x + 3 - 2x + 2][3x + 3 + 2x - 2]$
$= (x + 5)(5x + 1)$

Ejercicios propuestos

i. $36x^4y^4 - 81z^4 =$ _____

ii. $\frac{25}{121}a^6b^{18} - \frac{36}{144}c^{20}d^8 =$ _____

iii. $64m^4 - 36n^2 =$ _____

iv. $4(a - 3)^2 - 9(a - 1)^2 =$ _____

1.10.4. Suma o diferencia de cubos

Forma de reconocerlo

El polinomio tiene dos términos *cubos perfectos*[4]separados por el signo más o por el signo menos.

[3] Que se puede extraer la raíz cuadrada
[4] Que se puede extraer la raíz cúbica

Fórmulas

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Nota: Observe que en el primer factor hay dos términos y en el segundo factor existen tres términos ordenados en forma descendente y que difieren en los signos.

E*jercicios resueltos*

i. $8a^3 + 27b^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

ii. $27u^9 - 64v^3 = (3u^3 - 4v)(9u^6 + 12u^3v + 16v^2)$

E*jercicios propuestos*

i. $27m^6n^9 - 8p^{15}q^{12}$ _____

ii. $e^{3x} + 8e^{3x}$ _____

iii. $125y^6 + 64w^3$ _____

iv. $343a^3b^9 - 1331c^{12}$ _____

1.10.5. Trinomio cuadrado perfecto

Forma de reconocerlo

El polinomio tiene tres términos, el primero y tercero son cuadrados perfectos positivos y el segundo término es el doble producto de la raíces de los anteriores.

Formula

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

El sigo del 2º término

Ejercicios resueltos

i. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

ii. $144m^4 + 72m^2n^2 + 9n^4 = (12m^2 + 3n^2)^2$

iii. $a^2 + 2ab + b^2 - 25c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 25c^2$
$= (a + b)^2 - 25c^2$
$= (a + b)^2 - 25c^2$
$= (a + b + 5c)(a + b - 5c)$

combinción de TCP y DC[5]

[5] TCP = Trinomio cuadrado perfecto, DC = Diferencia de cuadrados

Ejercicios propuestos

i. $4u^2 - 28uv + 49v^2 =$ _____

ii. $\frac{1}{9}m^2 + \frac{2}{5}m + \frac{9}{25} =$ _____

iii. $x^2 8xy + 16y^2 =$ _____

1.10.6. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Forma de reconocerlo

El polinomio tiene tres términos, el primero es un cuadrado perfecto positivo con coeficiente igual a uno.

Regla

Formamos dos factores, el primer término de los dos factores es la raíz cuadrada del primer término, el segundo término en los dos factores son dos números que multiplicados nos de el tercer término y sumados algebraicamente nos reproduzcan el coeficiente del segundo.

Ley de signos

En el primer factor se pone el signo del 2º término y en el segundo factor el signo que resulta de la ley entre el 2º y 3º término.

Fórmula

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \qquad \text{Donde} \qquad \begin{matrix} c = m \cdot n \\ b = m + n \end{matrix}$$

Nota: El número de mayor valor absoluto se ubica en el primer factor.

Ejercicios resueltos

i. $x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$

ii. $a^2 - 5a - 24 = (a - 8)(a + 3)$

iii. $m^2 - 4mn + 3n^2 = (m - 3n)(m - n)$

Ejercicios propuestos

i. $x^2 + 8x + 15 =$ _____

ii. $b^2 - 10be + 30e^2 =$ _____

iii. $a^{20} + 5a^{10}b^2 - 24b^4 =$ _____

iv. $e^{4x} - 9e^{2x} + 20 =$ ____________________________________

v. $x^2 + x - 30 =$ ____________________________________

vi. $x^2 + 2x - 80 =$ ____________________________________

1.10.7. Trinomio de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c}$

Forma de reconocerlo

El polinomio debe tener tres términos (ordenados), la variable del primer término debe ser cuadrado perfecto positivo con coeficiente diferente de uno.

Regla

Formamos dos factores, el primer término de los dos factores son dos números que multiplicados reproduzcan el coeficiente del primer término acompañados de la raíz cuadrada de su variable, el segundo término en los dos factores en cambio son dos números que multiplicados reproduzcan el tercer término.

Nota: Debemos verificar que la suma algebraica del producto de los extremos y medios resulte igual al coeficiente del segundo término.

Fórmula

$m \cdot q$

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

$n \cdot p$

$$b = (m \cdot q) + (n \cdot p)$$

OjO: Los signos se ubican de la misma manera que en el caso anterior

Ejercicios resueltos

i. $8x^2 + 59x + 21 = (8x + 3)(x + 7)$

8 3
1 7

$8 \times 7 = 56$
$3 \times 1 = 3$
59

ii. $6x^2 + 23x - 18 = (2x + 9)(3x - 2)$

2 9
3 2

$2 \times -2 = -4$
$9 \times 3 = 27$
23

Ejercicios propuestos

i. $6x^2 - 7x - 3$ _____

ii. $2x^2 + 5x - 12$ _____

iii. $4b^2 - 9b - 9$ _____

iv. $7x^2 + 11x - 10$ _____

TAREA Nº 1

1) $(-32)^{1/5}$

2) $\left(\frac{4x^{-2}}{9y^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \div \left(\frac{8x^3}{27y^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$

3) $\frac{(0.008)^{1/3}}{5^{-1}}$

4) $\frac{8^{-\frac{2}{3}}\ 16^{-\frac{1}{4}}}{32^{-\frac{3}{5}}}$

5) $\frac{81^{0.25} + 9^{-0.5}}{(-27)^{\frac{1}{3}} + (-8)^{\frac{2}{3}}}$

6) $4^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{-3}$

7) $(-2)^{100} + (-16)^{25}$

8) $\left\{m^{-1}\left[m(m^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{-4}$

9) $(-27)^{2/3}$

10) $\left[(8a^6)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{(a^{-2})^{\frac{1}{2}}}\right]^{-1}$

11) $E = \frac{7^{x+3} - 7^{x+1}}{3(7^{x+1})2^4}$

12) $E = \frac{2^{3n} - 8^n + 4}{2^{2-n}}$

13) $E = \frac{15^6 \cdot 12^4 \cdot 5^9 \cdot 6^3}{10^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^4}$

14) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}}$

15) $\sqrt{\frac{2^{n+4} - 2^{n+3}}{2^n}}$

16) $\frac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}{\sqrt{\sqrt{27}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

17) $\sqrt[x-1]{\frac{3^{x-1} + 4^{x-1} + 6^{x-1}}{4^{1-x} + 6^{1-x} + 8^{1-x}}}$

18) $\left[\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{(\sqrt{ab})^5}\right)^6}\right]^2$

19) $[(-2^3)^{-2}]^{0.5}[(-0.5)^{0.75}]^{-4}$

20) $\frac{\sqrt[3]{-\frac{8}{9}}\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \frac{1}{46} \times 2.0\hat{4} - (0.8 - 1) \div 3}{0.55\ldots - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-2}} \times 5^{-1}$

21) $\frac{12^{x+2} \cdot 6^x}{18^{x+1} \cdot 4^x}$

22) $\sqrt[n]{\frac{x^{3n} + \sqrt[n]{\frac{x^{4n^2} + x^{3n^2}}{x^{2n^2} + x^{n^2}}}}{x^n + 1}}$

23) $\sqrt[2^n]{b^{2^n} + \sqrt{b^{2^{n+1}} - a^{2^n}}}\left[\sqrt[2^n]{b^{2^n} - \sqrt{b^{2^{n+1}} - a^{2^n}}}\right.$

24) $\frac{4^{\frac{2a}{a-b}} + 12 \cdot 4^{\frac{2b}{a-b}}}{\sqrt[a-b]{4^{a+b}}}$

25) $\sqrt{\frac{x^n y^n + y^{2n}}{x^{-n} y^n + 1}} \cdot \sqrt{\frac{x^n y^{-n} + 1}{x^n y^n + x^{2n}}}$

26) $\sqrt[n]{\frac{5^{2n} 2^{n+1} + 50^n}{5^n \cdot 8 - 5^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{5^{n^2-1}}}{5^{-1}\sqrt[1/n]{5^{-1}}}} \cdot \left[\sqrt[x^4]{\left[\sqrt[3]{25^{3x^3}}\right]^x}\right]^{-1}$

Respuestas

1)	-2	2)	x^2	3)	1
4)	1	5)	$\frac{10}{3}$	6)	4
7)	0	8)	m^2	9)	9
10)	2a	11)	E = 1	12)	$E = 2^n$
13)	E = 1	14)	$\frac{1}{4}$	15)	$2\sqrt{2}$
16)	$\sqrt[16]{3}$	17)	24	18)	$a^2b^2\sqrt{ab}$
19)	1	20)	-1	21)	8
22)	x^2	23)	a	24)	7
25)	1	26)	10		

2. Fracciones Algebraicas

Es toda expresión algebraica de la forma $\frac{a}{b}$; donde $b \neq 0$

Ejemplos:

$$\frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{5x^2 - 3y}{x + y} \quad ; \quad \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} \quad ; \quad 4x^{-1}yz^{-3}$$

2.1. Clases de fracciones

2.1.1. Fracciones Propias: Cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x}{x^3 + 5} \quad ; \quad \frac{3x - 2}{x^4 + 3x^2 - x + 5}$$

2.1.2. Fracciones Impropias: Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x^5 - 3}{x^2 + 4}; \quad \frac{2x^2 + 3x}{x - 1}$$

2.1.3. Fracciones Homogéneas: Cuando las fracciones tienen iguales los denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{5x}{x-2} \quad ; \quad \frac{5}{x-2} \quad ; \quad \frac{-1}{x-2}$$

2.1.4. Fracciones Heterogéneas: Cuando las fracciones tienen diferentes denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{x-5}{2x-1} \quad ; \quad \frac{x^2-3x+1}{x+2} \quad ; \quad \frac{3}{x^2-1}$$

2.1.5. Fracciones Irreducibles: Cuando el numerador y el denominador son primos entre si.

Ejemplos:

$$\frac{x+1}{x-5} \quad ; \quad \frac{x^2+y}{x+y} \quad ; \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{x^3-y^3-z^3}$$

2.1.6. Fracciones Equivalentes: Dos fracciones son equivalentes cuando tienen el mismo valor numérico para todo sistema de valores asignados a sus variables, excepto aquellos que haga cero el denominador.

Propiedades:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \;\; ; \;\; b \neq 0 \quad y \quad m \neq 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} \;\; ; \;\; b \neq 0 \quad y \quad m \neq 0$$

2.2. Signos de una Fracción

Tres signos están asociados a una fracción: el correspondiente al numerador, el del denominador y el propio signo de la fracción. Se pueden alterar dos cualesquiera de ellos, simultáneamente, sin que varíe el valor de la fracción. Si a una fracción no se le antepone signo alguno, se sobrentiende que éste es positivo.

$$+\frac{+}{+} \quad ; \quad +\frac{-}{+} \quad ; \quad +\frac{+}{-} \quad ; -\frac{-}{-} \quad ; \quad -\frac{+}{-} \quad ; \quad -\frac{-}{+}$$

2.3. Simplificación de Fracciones

Ejemplo 1: Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

1° Paso: Descomponemos en factores tanto el numerador como el denominador

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$$

2° Paso: Simplificamos aquellos factores que sean comunes a ambos

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x+2)}{(x-2)}$$

Ejemplo 2: Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{x^2-16}{8x-2x^2}$$

1° Paso: Descomponemos en factores tanto el numerador como el denominador

$$\frac{x^2-16}{8x-2x^2}=\frac{(x+4)(x-4)}{2x(4-x)}$$

2° Paso: Simplificamos aquellos factores que sean comunes a ambos

.

$$\frac{x^2-16}{8x-2x^2}=-\frac{(x+4)(x-4)}{2x(x-4)}=-\frac{x+4}{2x}$$

Cambio de signo a la fracción

Ordenar el polinomio[6]

2.4. Álgebra de Fracciones

Para realizar operaciones con fracciones algebraicas se deben seguir las siguientes reglas:

OPERACIÓN	REGLA
Adición Homogénea	$\frac{x}{y}+\frac{m}{y}=\frac{x+m}{y}$
Sustracción Homogénea	$\frac{x}{y}-\frac{m}{y}=\frac{x-m}{y}$
Adición Heterogénea	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{bx+ay}{ab}$
Sustracción Heterogénea	$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{bx-ay}{ab}$
Multiplicación	$\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{m}{y}\right)=\frac{mx}{ay}$
División	$\frac{x}{a}\div\frac{p}{q}=\frac{x}{a}\cdot\frac{q}{p}=\frac{qx}{ap}$

[6] Cuando se cambia de signo a una fracción, se ordena el polinomio para poder simplificar

Ejemplos 1: Adición y Sustracción

$$\frac{2x-y}{x^2y}+\frac{3x-4y}{2xy^2}-\frac{x^2-3y^2}{3x^2y^2}$$

1°	**Paso:** Factorar los denominadores	En este caso los denominadores son monomios
2°	**Paso:** Hallar el m.c.m.	$6x^2y^2$
3°	**Paso:** Realizar las operaciones de división y multiplicación respectivamente	$\frac{6y(2x-y)+3x(3x-4y)-2(x^2-3y^2)}{6x^2y^2}$
4°	**Paso:** Destruir paréntesis	$\frac{12xy-6y^2+9x^2-12xy-2x^2+6y^2}{6x^2y^2}$
5°	**Paso:** Reducir términos semejantes	$\frac{7x^2}{6x^2y^2}$
6°	**Paso:** Silplificar	$\frac{7}{6y^2}$

Ejemplo 2: Adición y Sustracción

$$\frac{x-2y}{x+2y}+\frac{x-2y}{y-x}+\frac{2x^2-5y^2}{x^2+xy-2y^2}$$

1°	**Paso:** Factorar los denominadores	$\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{x-2y}{x-y}+\frac{2x^2-5y^2}{(x+2y)(x-y)}$
2°	**Paso:** Hallar el m.c.m.	$(x+2y)(x-y)$
3°	**Paso:** Realizar las operaciones de división y multiplicación	$\frac{(x-y)(x-2y)-(x+2y)(x-2y)+2x^2-5y^2}{(x+2y)(x-y)}$
4°	**Paso:** Destruir paréntesis	$\frac{x^2-3xy+2y^2-x^2+4y^2+2x^2-5y^2}{(x+2y)(x-y)}$
5°	**Paso:** Reducir términos semejantes	$\frac{2x^2-3xy+y^2}{(x+2y)(x-y)}$
6°	**Paso:** Silplificar	$\frac{(x-y)(2x-y)}{(x+2y)(x-y)}=\frac{2x-y}{x+2y}$

Ejemplo 3: Multiplicación

$$\frac{2x-4y}{6x+3y}\cdot\frac{2x^2+xy}{4x+8y}$$

1° Paso: Factorar los numeradores y denominadores

$$= \frac{2(x-2y)}{3(2x+y)} \cdot \frac{x(2x+y)}{4(x+2y)} =$$

2° Paso: Silplificar

$$= \frac{\cancel{2}(x-2y)}{3\cancel{(2x+y)}} \cdot \frac{x\cancel{(2x+y)}}{\cancel{4}(x+2y)} =$$

$$= \frac{x(x-2y)}{6(x+2y)}$$

Ejemplo 4: División

$$\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3} \div \frac{a-x}{a^2-ax+x^2}$$

1° Paso: Factorar los numeradores y denominadores

$$= \frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)}{(a+x)(a^2-ax+x^2)} \div \frac{a-x}{a^2-ax+x^2} =$$

2° Paso: Transformar la división en multiplicación

$$= \frac{\cancel{(a-x)}(a^2+ax+x^2)}{(a+x)\cancel{(a^2-ax+x^2)}} \div \frac{\cancel{a^2-ax+x^2}}{\cancel{a-x}} =$$

3° Paso: Simplificar

$$= \frac{a^2+ax+x^2}{a+x}$$

Ejemplo 5: Fracciones Complejas

$$\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}}$$

1° Paso: Resolver las operaciones del numerador y denominador

$$\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a+b+a-b}{a+b}} =$$

$$= \frac{\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{2a}{a+b}} =$$

2° Paso: Realizar la multiplicación de extremos y medios

$$= \frac{\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}}{\frac{2a}{a+b}} = \frac{\cancel{4}ab\cancel{(a+b)}}{\cancel{2}a(a-b)\cancel{(a+b)}}$$

3° Paso: Simplificar

$$= \frac{2b}{(a-b)}$$

TAREA Nº 2

Operar y Simplificar las siguientes expresiones

1) $\dfrac{1-x^2}{x+1}$

2) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

3) $\dfrac{x^2-9}{x^4-81}$

4) $\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$

5) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x^3}$

6) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1} - \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

7) $\dfrac{x^2-1}{x+2} + \dfrac{3x-3}{x+3} - \dfrac{x-3}{x^2+5x+6} =$

8) $\dfrac{x+2}{(x+2)^2} \cdot \dfrac{x^2-4}{x}$

9) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} \right) \cdot \left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} \right)$

10) $\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-9} : \dfrac{a^2+9}{a^4-81}$

11) $\left(\dfrac{4}{x} - x \right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} \right)$

12) $\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x+1} + \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-3x+2} - \dfrac{1}{x^2+x-6}}$

13) $\dfrac{1 + \dfrac{a+b}{a-b}}{1 - \dfrac{a+b}{a-b}}$

14) $\dfrac{\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1}}$

15) $\left(\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2+x} - \dfrac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x} \right) : \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x}$

16) $\dfrac{\dfrac{36}{x+y}}{\dfrac{6}{x-y}} : \dfrac{\dfrac{3x}{x+y}}{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$

17) $\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{1+a+\dfrac{2a^2}{1-a}}}$

18) $1-\dfrac{x}{x+\dfrac{4}{x+\dfrac{6}{x}}}$

19) $-\dfrac{x}{2a^2-ax} - \dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$

20) $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$

Respuestas

1) $1-x$ 2) $\frac{x+2}{x-2}$ 3) $\frac{1}{x^2+9}$

4) $\frac{x^2+x}{x-2}$ 5) $-\frac{x+3}{x^2}$ 6) $\frac{-x^3-3x}{(x^2+2x+1)(x-1)}$

7) $\frac{x^3+6x^2+x-6}{x^2+5x+6}$ 8) $\frac{x-2}{x}$ 9) 4

10) $(a+3)^2$ 11) $4-2x$ 12) $\frac{x(x+3)(x^2-3x+2)}{2}$

13) $-\frac{a}{b}$ 14) $-x$ 15) 1

16) $\frac{2}{x(x+y)}$ 17) $\frac{a^2+1}{a+1}$ 18) $\frac{4}{x^2+10}$

19) $\frac{1}{a}$ 20) x

2.5. Racionalización

Es la operación que consiste en transformar un denominador irracional en otro equivalente que sea racioanal.

2.5.1. Factor Racionalizante

El factor racionalizante de una expresión irracional, es también otra expresión irracional que multiplicada por la primera, la convierte en una expresión racional.

Casos que se presentan

N°	Tipo de expresión		Factor Racionalizador	Ejemplo	
1	Monomio	$\sqrt[n]{a^p}$	$\sqrt[n]{a^{n-p}}$	$\sqrt[5]{a^2}$	$FR=\sqrt[5]{a^3}$
2	Binomio de raíz cuadrada	$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$	$\sqrt{5}\pm\sqrt{2}$	$FR=\sqrt{5}\mp\sqrt{2}$
3	Binomio de raíz cúbica	$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$	$\sqrt[3]{5}\pm\sqrt[3]{2}$	$FR=\sqrt[3]{5^2}\mp\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}$

Ejemplos: Racionalizar las siguientes expresiones

1) $\frac{3}{\sqrt[3]{4x^2y}}$ $FR=\sqrt[3]{2xy^2}$ *Desarrollo*

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{2^2x^2y}}\times\frac{\sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{2xy^2}}$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{2^3x^3y^3}}=\frac{3\sqrt[3]{2xy^2}}{2xy}$$

2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ $FR=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ *Desarrollo*

$$=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}$$

$$=\frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\cancel{2}}$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$ $FR=\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}$ *Desarrollo*

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}\times\frac{FR}{FR}$$

$$=\frac{FR}{(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{3})^3}$$

$$=\frac{FR}{5-3}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{3^2}}{2}$$

TAREA Nº 3

Racionalizar el denominador y simplificar las siguientes expresiones

1) $\dfrac{2}{3\sqrt[7]{x^4}}$

2) $\dfrac{6a^3bc^2}{\sqrt[6]{324a^3b^5c}}$

3) $\dfrac{12}{5-\sqrt{21}}$

4) $\dfrac{2\sqrt{14}}{4\sqrt{7}+3\sqrt{2}}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}}$

6) $\dfrac{2}{x^2-\sqrt{x^4+2x^2+1}}$

7) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$

8) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$

10) $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

11) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$

12) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$

13) $\dfrac{a}{\sqrt{2a-\sqrt[3]{a}+\sqrt{a}}}$

14) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}$

15) $\dfrac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x}}$

Respuestas

1)	$\frac{\sqrt[7]{8}}{3}$	2)	$a^2c\sqrt[6]{2^4 3^2 a^3 bc^5}$	3)	$15+3\sqrt{21}$
4)	$\frac{28\sqrt{2}-6\sqrt{7}}{47}$	5)	$\frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{5}$	6)	-2
7)	$4\sqrt{2}-4+2\sqrt[3]{4}$	8)	$\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}$	9)	$\frac{FR}{x-y}$
10)	$\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$	11)	$2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{5}$	12)	$\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$
13)	$\frac{FR1\cdot FR2}{a^2-1}$	14)	FR	15)	$-\sqrt[3]{x}$

3. Ecuaciones de primer grado y sistemas lineales

3.1. Ecuación

Ecuación es toda igualdad en la que se puede identificar una o más variables llamadas incógnitas.

3.2. Ecuaciones Lineales

Una ecuación es lineal por cuanto su gráfico representa una línea y se reconoce porque la variable es de primer grado.

En este texto las *variables* serán representadas por las últimas letras del abecedario, mientras que los números y las primeras letras se consideran valores *constantes*. *Ej.*

- $5x-2=3x+8$ Ecuación lineal con la variable “x”
- $m-4w=2m-3w$ Ecuación literal con la variable “w”
- $5t-6=7s-2$ Ecuación lineal con dos variables “s” y “t”

3.2.1. Solución de ecuaciones lineales

Resolver una ecuación significa hallar el valor de la variable que satisface una condición dada. Para resolver ecuaciones lineales con una incógnita seguimos los siguientes pasos:

1. Agrupamos las variables a un solo lado de la igualdad y las constantes al otro[7].

2. Resolvemos términos semejantes a los dos lados de la igualdad

[7] Al transportar los términos de un lado a otro de la igualdad debe cambiar el signo.

3. Despejamos la variable

Ejemplo 1: Resuelva la siguiente ecuación

$$2x - 5 - x + 4 = 6x + 2$$

Solución

Transportamos los términos	$2x - x - 6x = 2 + 5 - 4$
Resolvemos términos comunes	$-5x = 3$
Despejamos la variable	$x = -\frac{3}{5}$

Ejemplo 2: Resuelva la siguiente ecuación

Solución

Destruimos paréntesis	$2\left(\frac{9}{2}x + 4m\right) - 2x = 6\left(x - \frac{1}{6}m\right)$
Trasportamos términos	$9x + 8m - 2x = 6x - m$
Reducimos términos	$9x - 2x - 6x = -m - 8m$
Despejamos la variabl	$x = -9m$

3.3. Ecuaciones racionales

Son aquellas en las cuales la variable se encuentra en el denominador, para resolver debemos seguir los siguientes pasos:

i. Descomponemos en factores los denominadores *si es posible*
ii. Hallamos el m.c.m. de los denominadores
iii. Resolvemos la fracción hasta reducir términos semejantes
iv. Despejamos la variable

Ejemplo 3: Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{2x - 1}{x + 2} - \frac{x + 3}{x + 5} = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 7x + 10}$$

Solución

Factoramos los denominadores	$\frac{2x - 1}{x + 2} - \frac{x + 3}{x + 5} = \frac{x^2 - 3}{(x + 5)(x + 2)}$
Hallamos el m.c.m. en este caso	$(x + 5)(x + 2)$

Realizamos las divisiones	$(x+5)(2x-1)-(x+2)(x+3)=x^2-3$
Resolvemos las multiplicaciones	$2x^2+9x-5-x^2-5x-6=x^2-3$
Transportamos términos	$2x^2+9x-x^2-5x-x^2=-3+5+6$
Reducimos términos semejantes	$4x=8$
Despejamos la variable	$x=\frac{8}{4}$
Simplificamos la respuesta	$x=2$

Comprobación: Para verificar si el resultado es correcto, evaluamos la ecuación:

$$\frac{2(2)-1}{2+2}-\frac{2+3}{2+5}=\frac{2^2-3}{(2)^2+7(2)+10} \quad \rightarrow \quad \frac{4-1}{4}-\frac{5}{7}=\frac{4-3}{4+14+10} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}-\frac{5}{7}=\frac{1}{28}$$

$$\frac{21-20}{28}=\frac{1}{28} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{28}=\frac{1}{28} \qquad \underline{\text{Demostrado}}$$

3.4. Ecuaciones Irracionales

Es una igualdad en la que intervienen raíces y cuya incógnita forma parte de una o más cantidades subradicales., para resolver debemos seguir los siguientes pasos:

i. Dejamos un solo radical, a un lado de la igualdad
ii. Elevamos a los dos lados de la igualdad al exponente según indique el ídice
iii. Realizamos las operaciones correspondientes
iv. Transportamos términos
v. Despejamos la variable

Ejemplo 1: Resuelva la siguiente ecuación

$$\sqrt{2x-5}=7$$

Solución

Dejamos a un lado de la igualdad un solo radical	$\sqrt{2x-5}=7$
Elevamos al cuadrado a los dos lados de la igualdad	$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2=(7)^2$
Eliminamos radicales	$2x-5=49$
Agrupamos términos y los resolvemos	$2x=49+5$
Despejamos la variable	$x=\frac{54}{2}$
Simplificamos la respuesta si es posible	$x=37$

Nota: Toda ecuación irracional debe comprobarse porque al elevar la ecuación a una potencia par, la ecuación se transforma en otra, por lo que en algunos casos su solución no satisface la ecuación original.

Comprobemos en la ecuación original:

$$\sqrt{2\cdot 27-5}=7$$
$$\sqrt{54-5}=7$$
$$\sqrt{49}=7$$
$$7=7$$

Ejemplo 2: Resuelva la siguiente ecuación

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}=6$$

Dejamos a un lado de la igualdad un solo radical	$\sqrt{x+5}=6-\sqrt{x+2}$
Elevamos al cuadrado a los dos lados de la igualdad	$\sqrt{x+5}^{2}=\left(6-\sqrt{x+2}\right)^{2}$
Eliminamos radicales, resolvemos el cuadrado de un binomio y términos semejantes	$x+5=36-12\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)^{2}$
Repetimos el primer paso y resolvemos términos semejantes	$12\sqrt{x+2}=36-x-5+x+2$
Repetimos el segundo paso	$\left(12\sqrt{x+2}\right)^{2}=(33)^{2}$
Realizamos las operaciones correspondientes	$144(x+2)=1089$
Despejamos la variable	$144x=1089-288$ $x=\frac{801}{144}$
Simplificamos la respuesta	$x=\frac{89}{16}$

3.5. Ecuaciones de Segundo Grado

Son aquellas que pueden reducirse a la forma: $ax^2 \pm bx \pm c = 0$; siendo $a \neq 0$, donde a, b, y c son los coeficientes y "x" la variable o incognita.

Las ecuaciones de segundo grado se caracterizan por cuanto éstas pueden se completas e incompletas, todo depende del valor que tomen los coeficientes b y c.

Si: b y c $\neq 0$ $\rightarrow$ Ecuación Completa ; Si:b $= 0\, y/o$ c $= 0$ $\rightarrow$ Ecuación Incompleta

3.5.1. Ecuaciones Incompletas

En este caso la ecuación de segundo grado se presenta bajo una formas:

1) $Si\ b = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 \pm c = 0$

La solución es de la forma[8]:

$$x = \pm\sqrt{\mp\frac{c}{a}}$$

Ejemplo 1:

$3x^2 - 2 = 0$

$3x^2 = 2$

$x^2 = \frac{2}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Ejemplo 2:

$x^2 + 25 = 0$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25}$

$x = \pm 5i \qquad OjO^9 \qquad \sqrt{-1} = i$

2) $Si\ c = 0 \quad \rightarrow \quad ax^2 \pm bx = 0$

La solución se obtiene sacando factor común[10]:

$x(ax \pm b) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x = \mp\frac{b}{a}$

Ejemplo 1:

$3x^2 + 7x = 0$

$x(3x + 7) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{7}{3}$

3.5.2. Ecuaciones Completas

Para resolver ecuaciones de segundo grado, completas existen varios métodos que son:

[8] Una ecuación de segundo grado tiene dos raíces iguales pero de signo contrarios cuando la ecuación no tiene x

[9] La raíz cuadrada de un número negativo es un número imaginario.

[10] Una ecuación de segundo grado tiene una solución nula cuando el término independiente es cero

3.5.2.1. Por factorización

Como las ecuaciones de segundo grado son de la forma $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, entonces tienen dos raíces que se pueden encontrar descomponiendo en factores como un trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$.

Ejemplo 1:	*Ejemplo 2:*
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$3x^2 + 2x - 5 = 0$
$(x-3)(x-2) = 0$	$(3x+5)(x-1) = 0$
$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$	$3x + 5 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$
$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = 2$	$x_1 = -\frac{5}{3} \quad \vee \quad x_2 = 1$

3.5.2.2. Fórmula General

Para deducir la fórmula que permite hallar las raíces de una ecuación de segundo grado, se procede a *completar el trinomio cuadrado perfecto*; proceso que se detalla a continuación:

1° Paso	Verificamos que el coeficiente de x^2 sea 1	$ax^2 + bx + c = 0$
2° Paso	Dividimos a la ecuación por "a"	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
3° Paso	Pasamos el tercer término al otro lado de la igualdad	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
4° Paso	Completamos el trinomio cuadrado perfecto, utilizando el siguiente modelo matemático	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$
5° Paso	Sumamos a cada miembro de la igualdad lo obtenido en el paso anterior	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
6° Paso|	Factoramos el TCP al un lado de la igualdad y resolvemos la resta de fracciones al otro	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$
7° Paso	Extraemos raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad	$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
8° Paso	Depejamos "x"	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	FÓRMULA GENERAL	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo 1: Hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

Sacamos los datos

$a = 1$
$b = -5$
$c = 6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazamos en la fórmula general

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

Realizamos las operaciones

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Despejamos la variable

$$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = 2$$

Ejemplo 2: Hallar las raíces de la ecuación $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

Cambiamos la valiable $Si \qquad (x^2 + x) = v$

La ecuación resulta $v^2 - 8v + 12 = 0$

Aplicamos un método de solución $(v - 6)(v - 2) = 0$

$$v_1 = 6 \quad \vee \quad v_2 = 2$$

Reemplazamos en el cambio de variable $x^2 + x = 6 \quad \vee \quad x^2 + x = 2$

Armamos la ecuación de segundo grado $x^2 + x - 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 2 = 0$

Factorizando $(x + 3)(x - 2) = 0 \quad \vee \quad (x + 2)(x - 1) = 0$

Se obtienen 4 raíces

$$x_1 = -3 \quad \vee \quad x_2 = 2$$

$$x_3 = -2 \quad \vee \quad x_4 = 1$$

TAREA Nº 4

Resolver las siguientes ecuaciones

1) $\frac{3x-2}{4}=\frac{3x+3}{8}$

2) $\frac{3}{x}-\frac{a}{2}=-\frac{1}{a}$

3) $x(m-4)+x(m-5)=m(x-5)+m(x-4)$

4) $\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x+1}=\frac{8}{x^2-x-2}$

5) $\frac{2(2-x)}{x-1}+\frac{3-x}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}-3$

6) $\sqrt{2x-2}=4$

7) $\sqrt{3x+4}-5=0$

8) $\sqrt[3]{2x+7}=3$

9) $x+2=\frac{4}{x-2}$

10) $\frac{z}{3}+\frac{z}{z-5}=0$

11) $\frac{6}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$

12) $\frac{4}{x^2-x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{7{,}5}{x^2-4}$

13) $x^2-\frac{a^2+b^2}{ab}x+1=0$

14) $\frac{3y^2}{m}+m=\frac{7y}{2}$

15) $\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x-m}=\frac{x^2+5}{x^2-m^2}$

16) $\sqrt{5+2x}=x+1$

17) $\sqrt[3]{x^2-x+6}-2=0$

18) $x^2-6x-\sqrt{x^2-6x-3}=5$

19) $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5)=385$

20) $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=2\frac{1}{6}$

Respuestas

1)	$x = \frac{7}{3}$	2)	$x = \frac{6a}{a^2 - 2}$	3)	$x = m$
4)	$x = -2$	5)	$inconsistente$	6)	$x = 9$
7)	$x = 7$	8)	$x = 10$	9)	$x_1 = 2\sqrt{2}$ $x_2 = -2\sqrt{2}$
10)	$x_1 = 0\ ;\ x_2 = 2$	11)	$x_1 = 4\ ;\ x_2 = \frac{9}{5}$	12)	$x_1 = 3\ ;\ x_2 = -\frac{5}{4}$
13)	$x_1 = \frac{m}{2}\ ;\ x_2 = \frac{2m}{3}$	14)	$x_1 = \frac{a}{b}\ ;\ x_2 = \frac{b}{a}$	15)	$x = 1 \pm 2i$
16)	$x = 2$	17)	$x_1 = 2\ ;\ x_2 = -1$	18)	$x_1 = 7\ ;\ x_2 = 4$
19)	$x_1 = -4\ ;\ x_2 = 2$ $x = -1 \pm \sqrt{73}$	20)	$x_1 = \frac{9}{13}\ ;\ x_2 = \frac{4}{13}$		

4. Matrices y Determinantes

4.1. Definición

Las matrices son arreglos rectangulares de números ordenados en filas y columnas, se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Tienen también muchas aplicaciones en el campo de la física.

Una matriz de “n” filas y “m” columnas la llamaremos matriz de orden “n por m “ y su notación es “ nxm ”.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{nxm}$$

Ejemplo 1: La matríz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & -7 & 5 & 8 \\ 5 & 12 & -9 & 0 \end{bmatrix}_{3x4}$, tiene 3 filas y 4 columnas, es decir es de orden 3 x 4.

Cada “ a_{ij} “ recibe el nombre de componente de una matriz.[11]

[11] El (5) corresponde a la componente a_{23} segunda fila, tercera columna.

Ejemplo 2: La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x3}$ es una **matriz cuadrada**[12] de 3 x 3.

Ejemplo 3: La matriz $A = [2 \quad -3 \quad 1]_{1x3}$ es una **matriz fila** de 1 x 3.

Ejemplo 4: La matriz $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1}$ es una **matriz columna** de 3 x 1.

4.2. Igualdad de matrices

Las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son iguales si y solo si tienen el mismo tamaño y si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cadaj.

Ejemplo : Encunetre los valores de x, y, z, w, si las matrices A y B son iguales

$A = \begin{bmatrix} 2-x & 3y \\ z-3 & w \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1-z & -5 \end{bmatrix}$

Solución

Dado que las matrices A y B son iguales procedemos a igualar las correspondientes componentes de las dos matrices; de la siguiente manera:

$2 - x = -2$ $\quad$ $3y = 6$ $\quad$ $z - 3 = 1 - z$ $\quad$ $w = -5$

$x = 4$ $\quad$ $y = 2$ $\quad$ $2z = 4$

$z = 2$

4.3. Clases de matrices

4.3.1. Matriz transpuesta

Si A es una matriz, la matriz que se forma a partir de A mediante el intercambio de sus renglones con sus columnas toma el nombre de transpuesta de A ó A^T.

Ejemplo: Encunetre la matriz transpuesta de las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} m & n & r \\ p & q & s \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} m & p \\ n & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

[12] Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas se dice que es una matriz cuadrada

4.3.2. Matriz triangular

Lammamos matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero. Así pues, las matrices A, B y C son triangulares.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4.3.3. Matriz identidad (I)

Es aquella cuya diagonal principal esta compuesta de la unidad y los demás elementos son iguales a cero. Así pues, las matrices A, B y C son Identidades.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4. Operaciones con matrices

4.4.1. Suma de matrices

Si las matrices A y B son del mismo orden entonces el resultado de la suma de A con B, se obtiene sumando los elementos de la matriz A con los correspondientes componentes de la matriz B.

Ejemplo: Hallar la matriz resultante de la suma de A y B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (1 - 3) & (-2 + 1) & (-4 + 0) \\ (-4 + 7) & (2 - 2) & (3 + 0) \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2x3}$$

4.4.2. Resta de matrices

Si dos matrices A y B son del mismo orden, el resultado de restar (A – B) se obtiene sumando la matriz A con el inverso aditivo de la matriz B[13].

[13] El inverso aditivo de una matriz se obtiene multiplicando (-1)[A]

Ejemplo: Hallar la resta A – B con las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} (2+3) & -1-4 \\ 4+2 & -3+1 \\ -5+0 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 6 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

4.4.3. Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices (A x B) debe cumplir con una condición fundamental: "el número de **columnas** de la matriz **A** debe ser igual al número de **filas** de la matriz **B**"

El proceso consiste en multiplicar distributivamente los elementos de cada una de las filas de la matriz A con los correspondientes componentes de las columnas de la matriz B; de la siguiente manera:

Ejemplo: Hallar el producto A x B con las siguientes matrices[14]

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x3}$$

condición

$$AxB = \begin{bmatrix} (-2\cdot 2 + 1\cdot 1 - 2\cdot 1) & (2\cdot 1 + 1\cdot 4 + 2\cdot 2) & (-2\cdot 0 - 1\cdot 2 + 2\cdot 3) \\ (-3\cdot 2 + 1\cdot 1 - 5\cdot 1) & (3\cdot 1 + 1\cdot 4 + 5\cdot 2) & (-3\cdot 0 - 1\cdot 2 + 5\cdot 3) \end{bmatrix}$$

$$AxB = \begin{bmatrix} (-4+1-2) & (2+4+4) & (0-2+6) \\ (-6+1-5) & (3+4+10) & (0-2+15) \end{bmatrix}$$

$$AxB = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 4 \\ -10 & 17 & 13 \end{bmatrix}$$

[14] Si $[A]_{mxc}$ y $[B]_{cxn}$, el resultado de [A]x[B] es de orden mxn

4.4.4. Matrices invertibles

Se dice que una matriz cuadrada *A* es invertible, si existe una matriz *B* cque cumple con la propiedad de que:

$$A \times A^{-1} = I$$

Para encontrar la inversa de una matriz se aplica el método de **Gauss[15],** cuyo proceso se explica a continuación:

Ejemplo 1: Hallar la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

1° Paso:
Construir la matriz aumentada M= (A ⋮ I)

$$M = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2° Paso
Trasformamos la segunda fila realizando la operación

$$M = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \quad (2F_1 - F_2) \rightarrow F_2$$

3° Paso
Trasformamos la primera fila realizando la operación

$$M = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \quad (F_1 - 3F_2) \rightarrow F_1$$

4° Paso
La matriz que resulta del lado derecho de la matriz aumentada es **A^{-1}**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

5° Paso
Comprobamos el resultado aplicando la definición **A** x **A^{-1} = I**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} (-5+6) & (3-3) \\ (-10+10) & (6-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Encuentre A^{-1}*, dada*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[15] El método de Gauss en un proceso de transformación de filas y columnas en ceros y unos.

Solución

$$A : I = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F_3 - F_2 \rightarrow F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$(-1/2)\ F_3 \rightarrow F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$-F_3 + F_2 \rightarrow F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$F_1 - 2F_2 \rightarrow F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$F_1 - 3F_3 \rightarrow F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego se puede comprobar que A x A^{-1} = I

Ojo: ¿Cómo sabemos si una matriz **A** es invertible o no[16]?

Si aplicamos el procedimiento de transformar **A | I** a su forma reducida y si en cualquier etapa encontramos que cualquiera de las filas de la matriz a la izquierda de la línea vertical (de color azu) sólo consta de ceros, entonces puede probarse que $\mathbf{A^{-1}}$ no existe.

[16] No todas las matrices son invertibles

4.5. Determinantes

Llamamos determinante de una **matriz cuadrada** al numéro real que se obtiene al aplicar ciertas reglas y procedimientos matemáticos establecidos, se denota por $|A|$ o det(A).

4.5.1. Determinante de una matriz 2x2

El determinante de una matriz A de orden 2x2 se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Se multiplican los elementos de la diagonal principal y se resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo: Encontrar el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-3)(2) - (4)(-5)$$

$$|A| = -6 + 20$$

$$|A| = 14$$

4.5.2. Determinante de una matriz 3x3

El determinante de una matriz A de orden 3x3 se obtiene[17]:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Ejemplo: Encontrar el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (2)(-2)(5) + (-4)(3)(0) + (1)(-3)(4) - (4)(-2)(0) - (-4)(1)(5) - (3)(-3)(2)$$
$$|A| = -20 + 0 - 12 - 0 + 20 + 18$$
$$|A| = 6$$

[17] El método para hallar determinantes de orden 3x3 se le conoce como Regla de Sarrus.

4.5.3. Determinate de una matriz por el método del ***Menor Cofactor***

Si las matrices son de orden $[A]_{3x3}$ o de orden superior como: $[A]_{4x4}$, $[A]_{5x5}$, etc. Se recomienda utilizar un método llamado del ***Menor Cofactor*** ; que dice:

Para cada entrada a_{ij} de una matriz cuadrada A de orden nxn , el menor M*ij* se define como el determinante de la matriz de orden n – 1 obtenida al suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de A.

Para el uso de este método se debe considerar la siguiente ley de signos, de la posición que ocupa un determinado elemento (cofactor) en la matriz[18].

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

El método del menor cofactor se explica de la siguiente manera

Dada la matriz [A]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Suprimimos la primera fila y la primera columna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El cofactor es a_{11} y su signo es (+)

Matriz reducida

$$M_{11} = (a_{11}) \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Suprimimos la primera fila y la segunda columna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El cofactor es a_{12} y su signo es (-)

Matriz reducida

$$M_{12} = -(a_{12}) \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Suprimimos la primera fila y la tercera columna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El cofactor es a_{13} y su signo es (+)

Matriz reducida

$$M_{11} = (a_{13}) \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz [A] quedaría:

$$|A| = (a_{11}) \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - (a_{12}) \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (a_{13}) \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

[18] Los signos de un cofactor de una matriz nxn van alternados

Ejemplo: Encontrar el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

1° Paso
Elegimos la segunda fila para transformarle en ceros y unos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$C_2 - 5C_1 \rightarrow C_2$

2 – 15 = -13
5 – 5 = 0
- 2 – 20 = -22
1 – 0 = 1

$C_3 - C_1 \rightarrow C_3$

0 – 3 = -3
1 – 1 = 0
0 – 4 = -4
-3 – 0 = -3

2° Paso
Elegimos la segunda fila y la primera columna y encontrar el menor cofactor

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -13 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -22 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3 Paso
Multiplicamos el cofactor con la matriz reducida, tomando en cuenta el signo del mismo

$$A = -(1)\begin{bmatrix} -13 & -3 & -1 \\ -22 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

4 Paso
Resolvemos el determinante utilizando Sarrus

$$A = (-1)(104 - 3 - 66 - 4 - 132 - 39)$$
$$A = (-1)(-140)$$
$$A = 140$$

4.6. Aplicaciones de la matrices

Entre otras, una de las principales aplicaciones de las matrices es: la solución de *Sistemas de Ecuaciones Lineales*.

4.6.1. Regla de Cramer

En el año de 1750 Cramer desarrolló un método que utiliza determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Se llama *determinante* a un arreglo rectangular de orden matemático, de cantidades que se presentan dentro de dos barras.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por determinantes

$$\begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Solución

Hallamos el determinante del sistema con los coeficientes de las variables, multiplicando las cantidades como indican las flechas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1) - 3(3) = -5 - 9 = -14$$

Hallamos el determinante de la variable “x”, sustituyendo sus valores con los términos independientes.

$$\mathrm{x} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{8(-1) - 2(3)}{-14} = \frac{-8 - 6}{-14} = \frac{-14}{-14} = 1$$

Hallamos el determinante de la variable “y”, sustituyendo sus valores con los términos independientes.

$$\mathrm{y} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{5(2) - 3(8)}{-14} = \frac{10 - 24}{-14} = \frac{-14}{-14} = 1$$

La solución al sistema es sol $(1\,,1)$

4.6.2. Método de Gauss – Jordan

Un sistema de *n* ecuaciones con *n* incognitas puede escribirse en forma general de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = k_3 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = k_n \end{array}$$

Si tomamos como referencia el sistema de tres ecuaciones con tres incognitas que se indica a continuación.

$$\begin{array}{c} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = k_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = k_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = k_2 \end{array}$$

Las ecuaciones pueden ser expresadas en forma matricial mediante el siguiente modelo matemático:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Aplicando Gauss Jordan, reselva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 5 \end{array}$$

Solución

1° Paso
Contruimos una matriz aumentada con los coeficientes de las variables y los términos independientes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 10 & 5 \end{array}\right]$$

2° Paso
Escalonamos la matriz, de idéntica manera como el proceso de matriz inversa.

$F_2 - 4F_1 \rightarrow F_2$
$F_3 - 7F_1 \rightarrow F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -11 & -2 \end{array}\right]$$

$(-1/3)\ F_2 \rightarrow F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -11 & -2 \end{array}\right]$$

$F_3 + 6F_2 \rightarrow F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

3 Paso
El sistema escalonado queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_3 = 10$ en la segunda ecuación obtenemos:
$x_2 + 2(10) = 2$
$x_2 = 2 - 20$
$x_2 = -18$

4 Paso
La solución del sistema se encuentra reemplazando los valores en las ecuaciones del sistema escalonado

Sol.
$\boldsymbol{x_1 = 7}$
$\boldsymbol{x_2 = -18}$
$\boldsymbol{x_3 = 10}$

Sustituyendo $x_3 = 10$ y $x_2 = -18$ en la primera ecuación obtenemos:
$x_1 + 2(-18) + 3(10) = 1$
$x_1 - 36 + 30 = 1$
$x_1 = 7$

TAREA Nº 5

Resolver las siguientes ejercicios aplicando leyes y propiedades de matrices

1) Determine el valor de las variables para las cuales las siguientes matrices son iguales

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+2 & z \\ 4 & t-1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x+2 & 5 & y-3 \\ 4 & z-6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & t+1 & 2y-5 \\ 4 & 2 & z-1 \end{bmatrix}$

2) Efectúe las operaciones indicadas y simplifique

a) $2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $4\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3) Encuentre la inversa de la matriz dada

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

4) Encuentre el determinante de las siguientes matrices

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} x+3 & 2 \\ x & x+1 \end{bmatrix} = 3$ f) $\begin{bmatrix} x+1 & 2 & x \\ x & x^2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$

5) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Gramer y de Gauss

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 8 \\ 3y + 7x &= -13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - 2z &= -1 \\ -x + 2y + 5z &= 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2t - 3v - w &= 2 \\ 3u - 2v - 5w &= 3 \\ 4u - 3w &= 2 \\ t - 3u + 3w &= 0 \end{aligned}$$

Respuestas

1) a) $x = 4 \quad ; \quad y = 1$, $z = -1 \quad ; \quad t = 2$

b) $x = 1 \quad ; \quad y = 2$, $z = 8 \quad ; \quad t = 4$

2) a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 13 & 4 & -12 \\ 5 & 10 & 21 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -6 & 5 & -22 & 1 \\ 3 & -4 & 35 & -16 \\ -3 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 21 \\ 14 & 9 & 16 & 35 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ 32 \end{bmatrix}$

3) a) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 9 & -7 & -11 \\ 12 & 0 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

4) a) $|A| = -2$

b) $|A| = -77$

c) $|A| = 85$

c) $|A| = 678$

e) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

f) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$

5) a) $x = -1 \quad ; \quad y = -2$

b) $x = 1 \; ; \; y = 2 \; ; z = 3$

c) $t = 3 \quad ; \quad u = -1$, $v = 2 \quad ; \quad w = -2$

5. Fracciones parciales

5.1. Fracciones propias e Impropias

Se dice que una función racional $P(x)/D(x)$ es una **fracción propia**, si el grado del polinomio P(x) es menor que el grado del polinomio D(x), por el contrario, es decir, si el grado de P(x) es mayor o igual al de D(x), la fracción se llama **impropia**.

Toda fracción impropia puede ser expresada en *fracciones parciales*, efectuando la división, como la suma de un polinomio mas una fracción propia, aplicando el algoritmo de la división tenemos:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = cociente(x) + \frac{residuo(x)}{divisor(x)}$$

5.2. Coeficientes indeterminados

Es un proceso matemático que consiste en intuir la posible solución de una expresión algebraica de n-simo grado.

Grado del polinomio	Polinomio de coeficientes determinados	Polinomio de coeficientes indeterminados
0	5	A
1	-3x + 2	Ax + B
2	$3x^2$ - 2x + 4	Ax^2 + Bx + C
3	$2x^3 – 5x^2$ + x – 1	$Ax^3 + Bx^2$ + Cx + D
⋮	⋮	⋮

5.3. Procedimiento para descomponer una fracción en fracciones parciales

1) Comparar el grado del numerador y del denominador

Si N° ≥ D°, transformamos la fracción en una fracción mixta aplicando el algoritmo de la división.

Si N° < D°, continuamos al siguiente paso

2) Descomponer en factores el denominador

3) Formar tantas fracciones parciales como factores tenga el denominador[19]

Factores no repetidos[20]

$$\frac{N}{(x+a)(x-b)(x^2+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+c}$$

Factores repetidos

$$\frac{N}{(x+a)^3(x^2-b)^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{(x+a)^3} + \frac{Dx+E}{x^2-b} + \frac{Fx+G}{(x^2-b)^2}$$

4) *Sumamos algebraicamente las fracciones e igualamos los numeradores*

[19] Cada factor es el denominador de cada una de las fracciones parciales.

[20] El numerador es un polinomio con coeficientes indeterminados, de un grado menor que el denominador.

Ejemplo 1: Descomponer en fracciones parciales la siguiente fracción

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}$$

Solución

1° Paso
Comparamos el grado del numerador y del denominador

N° < D°, pasamos al siguiente paso

2° Paso
Descomponemos en factores el denominador

$$x^3+2x^2-3x = x\left(x^2+2x-3\right)$$
$$= x(x+3)(x-1)$$ factores no repetidos

3° Paso
Armamos las fracciones parciales

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-1}$$

4° Paso
Sumanos las fracciones e igualamos numeradores

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3)}{x(x+3)(x-1)}$$

$$4x^2+13x-9 = A\left(x^2+2x-3\right)+B\left(x^2-x\right)+C\left(x^2+3x\right)$$

$$4x^2+13x-9 = Ax^2+2Ax-3A+Bx^2-Bx+Cx^2+3Cx$$

Formamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B+C=4 \\ x^1 & 2A-B+3C=13 \\ x^0 & -3A=-9 \end{array}$$

$$A = \frac{9}{3}$$
$$A = 3$$

Reemplazando el valor de A obtenemos el sistema

$$\begin{array}{r} B+C=1 \\ -B+3C=7 \\ \hline 4C=8 \\ C=2 \end{array}$$

$$B = 1-2$$
$$B = -1$$

5° Paso
Las fracciones parciales serían:

Reemplazando los valores de A, B y C tenemos

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{3}{x}-\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-1}$$

Ejemplo 2: Descomponer en fracciones parciales la siguiente fracción

$$\frac{x^2+10x-36}{x^3-6x^2+9x}$$

Solución

1° Paso
Comparamos el grado del numerador y del denominador

N° < D°, pasamos al siguiente paso

2° Paso
Descomponemos en factores el denominador

$$x^3-6x^2+9x = x\left(x^2-6x+9\right)$$
$$= x(x-3)^2$$ factores repetidos

3° Paso
Armamos las fracciones parciales

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

4° Paso
Sumanos las fracciones e igualamos numeradores

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}=\frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2}$$

$$x^2+10x-36=A(x^2-6x+9)+B(x^2-3x)+C(x)$$

$$x^2+10x-36=Ax^2-6Ax+9A+Bx^2-3Bx+Cx$$

Formamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos

$$\begin{array}{c|cc} x^2 & A+B=1 & \\ x^1 & -6A-3B+C=10 & A=-\frac{36}{9} \\ x^0 & 9A=-36 & A=-4 \end{array}$$

Reemplazando el valor de A obtenemos

$$-4+B=1 \qquad 24-15+C=10$$
$$B=5 \qquad C=10-9$$
$$C=1$$

5° Paso
Las fracciones parciales serían:

Reemplazando los valores de A, B y C tenemos

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}=-\frac{4}{x}+\frac{5}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}$$

Ejemplo 3: Descomponer en fracciones parciales la siguiente fracción

$$\frac{x^4+1}{x^3+8}$$

Solución

1° Paso
Comparamos el grado del numerador y del denominador

N° ≥ D°, debemos dividir

2° Paso
Dividimos y utilizamos el algoritmo de la división

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^3+8 \\ -x^4-8x & x \\ -8x+1 & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$$

$$\frac{P(x)}{D(x)}=x-\frac{8x-1}{x^3+8}$$

3° Paso
Descomponemos en factores el denominador

$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$$

4° Paso
Armamos las fracciones parciales

$$\frac{8x-1}{x^3+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

5° Paso
Sumanos las fracciones e igualamos numeradores

$$\frac{8x-1}{x^3+8}=\frac{A(x^2-2x+4)+(x+2)(Bx+C)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$8x-1=Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+Cx+2Bx+2C$$

6° Paso
Formamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos

$x^2 \quad A+B=0$
$x^1 \quad -2A+2B+C=8$
$x^0 \quad 4A+2C=-1$

Luego
$A=-B$

7° Paso
Reemplazando el valor de A en las ecuaciones 2 y 3 obtenemos

$2B+2B+C=8$
$4B+C=8$

$-4B+2C=-1$
$-4B=-1-\frac{14}{3}$
$B=\frac{17}{12} \qquad A=-\frac{17}{12}$

Resolviendo el sistema
$4B+\ C=8$
$-4B+2C=-1$
$3C=7$
$C=\frac{7}{3}$

8° Paso
Las fracciones parciales serían:

Reemplazando los valores de A, B y C tenemos

$$\frac{x^4+1}{x^3+8}=x-\left[\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}\right]$$

$$\frac{x^4+1}{x^3+8}=x-\left[\frac{-\frac{17}{12}}{x+2}+\frac{\frac{17}{12}x+\frac{7}{3}}{x^2-2x+4}\right]$$

$$\frac{x^4+1}{x^3+8}=x+\frac{17}{12(x+2)}+\frac{17x+28}{12(x^2-2x+4)}$$

TAREA Nº 6

Descomponer en fracciones parciales las siguientes fracciones

1) $\frac{5x+7}{x^2+2x-3}$

2) $\frac{x^3+2x^2-1}{x^2+x-6}$

3) $\frac{9x^3+16x^2+3x-10}{x^3(x+5)}$

4) $\frac{2x^4-4x^2-x+2}{(x^2-x)^2}$

5) $\frac{3x^2-1}{x^3-x}$

6) $\frac{e^{2x}-4e^x+1}{e^{3x}-2e^{2x}-e^x+2}$

Respuestas

1) $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}$

2) $x+1+\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}$

3) $\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x+5}$

4) $2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$

5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

6) $\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^x+1}-\frac{2}{e^x-2}$

SEGUNDO PARCIAL

6. Desigualdades e Inecuaciones

6.1. Desigualdades absolutas

Son aquellas que se verifican para cualquier valor que se den a la variable:

$(x-5)^2 \geq 0, esta\ desigualdad\ es\ verdadera\ para\ cualquier\ valor\ que\ tome\ x$

$(x-5)^2 > 0, esta\ desigualdad\ es\ verdadera\ siempre\ y\ cuando\ x \neq 5$

$(x-5)^2 \leq 0, esta\ desigualdad\ es\ falsa, ya\ que\ en\ ningún\ caso\ se\ obtendría\ resultado\ negativo.$

6.2. Inecuación

Es una desigualdad que se verifica para determinados valores que se den a la variable.

El resultado de una inecuación es ***Intervalo*** (un conjunto de números que pertenecen a los Reales) y que satisfacen la condición dada.

En este sentido antes de proceder a explicar cómo se resuelve una inecuación, se dan a conocer los tipos de intervalos utilizados en las matemáticas previas al cálculo.

6.3. Intervalo

Un intervalo se define como un subconjunto de números reales que está comprendido entre dos números a y b llamados extremos.

6.4. Tipos de intervalos

Nombre	Notación	Conjunto	Gráfico
Abierto	] a , b [	a < x < b	
Cerrado	[a , b]	a ≤ x ≤ b	
Semiabierto	] a , b]	a < x ≤ b	
	[a , b [	a ≤ x < b	
Intervalos Infinitos	] a , +∞ [	x > a	
	] -∞ , b [	x < a	
	[a , +∞ [	x ≥ a	
	] -∞ , a]	x ≤ a	

Los intervalos antes enunciados, permite expresar las respuestas de las inecuaciones; las mismas que se dan a conocer a continuación.

6.5. Inecuaciones de primer grado o lineales

Son de la forma $ax \pm b > 0$ ó $ax \pm b < 0$

O también $ax \pm b \geq 0$ ó $ax \pm b \leq 0$

Para expresar el resultado de una inecuación en forma de intervalo, es necesario recordar que los signos "**>**" **mayor que** o "**<**" **menor que**, significan intervalos abiertos y los signos "**≥**" **mayor igual que** o "**≤**" **menor igual que**, significan intervalos cerrados.

Ejercicios Resueltos

Encuentre el resultado de las siguientes inecuaciones

1. $5 - 2x > 7 - 5x$

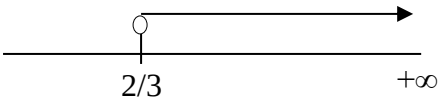
Agrupamos letras y números a cada lado de la desigualdad

$$\boldsymbol{-2x + 5x > 7 - 5}$$

$$\boldsymbol{3x > 2}$$

$$\boldsymbol{x > \frac{2}{3}}$$

Representamos gráficamente



Solución en forma de intervalo

] 2/3 ; +∞ [

2. $\frac{3}{2}(2x - 5) + \frac{1}{3} \leq \frac{7 + 15x}{4}$

Hallamos el m.c.m y resolvemos operaciones hasta despejar la variable

$$18(2x - 5) + 4 \geq 3(7 + 15x)$$

$$36x - 90 + 4 \geq 21 + 45x$$

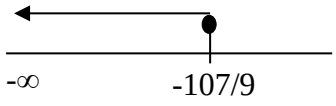
OJO: si la variable queda negativa, debemos multiplicar por (-1) y ***cambia el signo de la desigualdad***.

$$-9x \geq 107 \qquad (-1)$$

$$9x \leq -107$$

$$x \leq -\frac{107}{9}$$

Representamos gráficamente



Solución en forma de intervalo

] -∞ ; -107/9]

3. $0 \leq 2x - 3 < 5$

Dividimos la inecuación simultánea en dos inecuaciones

$$0 \leq 2x - 3 \quad \wedge \quad 2x - 3 < 5$$

$$-2x \leq -3 \qquad 2x < 8$$

$$2x \geq 3 \qquad x < 4$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

Representamos gráficamente, tomando encuenta que la "^" significa ***Intersección.***

Buscamos la intersección y hallamos la solución en forma de intervalo

[3/2 ; 4 [

6.6. Inecuaciones de segundo o cuadráticas

Son de la forma $ax^2 \pm bx \pm c > 0$, $ax^2 \pm bx \pm c < 0$

O también $ax^2 \pm bx \pm c \geq 0$, $ax^2 \pm bx \pm c \leq 0$

Para resolver inecuaciones de segundo grado, se aplica el método de ***intervalos o regiones.***

Ejercicios Resueltos

Encuentre el resultado de las siguientes inecuaciones

1. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Descomponemos en factores y verificamos que la variable sea positiva.

$$(x - 3)(x - 2) \geq 0$$

Hallamos los valores críticos

$x - 3 = 0$ $\qquad$ $x - 2 = 0$

$x = 3$ $\qquad$ $x = 2$

Ubicamos los valores en la recta numérica y observamos el signo de desigualdad para saber si se trata de un intervalo abierto o cerrado.

Dado que la variable en cada factor es positivo, armamos las regiones y en cada una de ellas ubicamos los signos alternadamente más (+), menos (-), más (+)

Para seleccionar los intervalos ***de respuesta*** nos fijamos en el signo de la desigualdad. En este caso como es ($\geq \mathbf{0}$), seleccionamos las regiones positivas.

]-∞ , 2] ∪ [3 , +∞[

2. $-2x^2 + 3x - 1 > 0$

Multiplicamos por (-1) a la expresión y ojo cambia la desiguldad.

$2x^2 - 3x + 1 < 0$

Factoramos

$(2x - 1)(x - 1) < 0$

Hallamos los valores críticos

$2x - 1 = 0$ $\qquad$ $x - 1 = 0$

$x = 1/2$ $\qquad$ $x = 1$

Ubicamos los valores en la recta numérica.

Como el signo de desigualdad es ($< \mathbf{0}$), seleccionamos la región negativa.

]1/2 , 1[

6.7. Inecuaciones Irracionales

Se llaman también inecuaciones fraccionarias y se definen de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

Las inecuaciones irracionales necesitan ser analizadas de una manera detallada, su proceso minucioso lo explicamos a continuación.

Ejercicios Resueltos

1. $\dfrac{7x-5}{8x+3} \geq 4$

Se pasan todos los términos a lado izquierdo de la desigualdad de tal forma que nos quede cero a la derecha.

$$\frac{7x-5}{8x+3} - 4 \geq 0$$

$$\frac{7x-5-4(8x+3)}{8x+3} \geq 0$$

Hallamos el mínimo común múltiplo y realizamos las operaciones hasta dejar factorizado el numerador y el denominador

$$\frac{7x-5-32x-12}{8x+3} \geq 0$$

$$\frac{-25x-17}{8x+3} \geq 0$$

No aseguramos que la varible sea positiva, caso contrario multiplicamos por (-1)

$$\frac{25x+17}{8x+3} \leq 0$$

Hallamos los valores críticos y los ubicamos en la recta numérica.

Como el signo final de la desigualdad es (≤ **0**), seleccionamos la región negativa.

[-17/25 , -3/8[

TAREA Nº 6

Halle la solución de las siguientes inecuaciones

1) $2x-5<5x+7$

2) $\dfrac{2x-1}{3} \geq 1 - \dfrac{x-2}{5}$

3) $(2x-5)(x-6) \leq 2(x+4)^2 - 6$

4) $-1 \leq -3+3x \leq 2$

5) $3 \leq \frac{-2x+3}{2} < 4$

6) $5x - 2 < 10x + 8 < 2x - 8$

7) $x^2 \leq 4$

8) $-6x^2 - x + 12 \geq 0$

9) $x^3 + 6 \geq 7x$

10) $-x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 24 > 0$

11) $2x - \frac{9}{x-3} > x - \frac{5}{x-3}$

12) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} < \frac{8}{x^2-1}$

Respuestas

1)] -∞ , -4 [

2) [2 , +∞ [

3) [4/33 , +∞ [

4) [2/3 , 5/3]

5)] -5/2 , -3/2]

6) ∅

7) [-2 , 2]

8) [-3/2 , 4/3]

9) [-3 , 1] U [2 , +∞ [

10)] 1 , 2 [U] 3 , 4 [

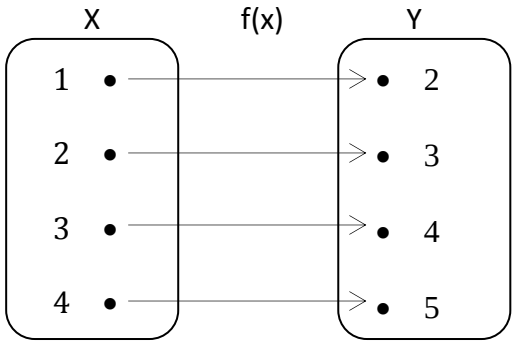
11)] -1 , 3 [U] 4 , +∞ [

12)] -2 , -1 [U] 1 , 3 [

7. Funciones

7.1. Función

Cuando se establece una correspondencia entre dos conjuntos, definido a través de f(x) y si a cada elemento del conjunto de partida le corresponde uno y solo un elemento del conjunto de llegada, entonces la relación se llama *función*.



Observe que los elementos del conjunto de partida X, se relacionan a través de f(x) con los elementos del conjunto de llegada Y.

El diagrama sagital muestra como al *sumar* uno a cada elemento del conjunto de partida, se obtiene el conjunto de llegada. Luego:

$$y = x + 1$$

7.2. Formas de expresar una función

Para representar una función planteamos una igualdad con dos variables (*generalmente x e y*); del diagrama anterior se tiene:

Variable independiente

$$y = x + 1$$

Variable dependiente

A la variable independiente le asignamos valores arbitrarios y determinamos el valor de la otra variable, encontrando una serie de pares ordenados.

Los pares ordenados de la relación que se plantea al principio son:

$$Rf(x) = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$$

Nota: En este texto, para expresar una función utilizaremos la siguiente notación:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{donde} \quad f(x) = y$$

7.3. Representación gráfica de una función

Para graficar una función debemos conocer el conjunto de pares ordenados determinados por el *dominio* y *rango* de la función f(x).

Dominio de la función D(x)

Llamamos *dominio* de una función al conjunto de números reales que debe tomar la variable independiente "x" para definirla.

Rango de la función R(x)

Llamamos rango o *recorrido* de una función al conjunto de números reales de la variable dependiente "y", que son imagen del dominio de la función.

7.4. Técnicas para hallar el Dominio de una función

Para hallar el dominio de una función requiere de una técnica algebraica, que tiene dos pasos:

- Despejar "y" en términos de "x", si esto es posible
- Analizar ¿qué valores debe tener "x" para que la variable "y" sea un número real?

Ejemplo 1: Determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = -3x^2 - 2x + 4$$

Solución

1° Paso
Identificamos si la variable independiente "x" tiene alguna restricción

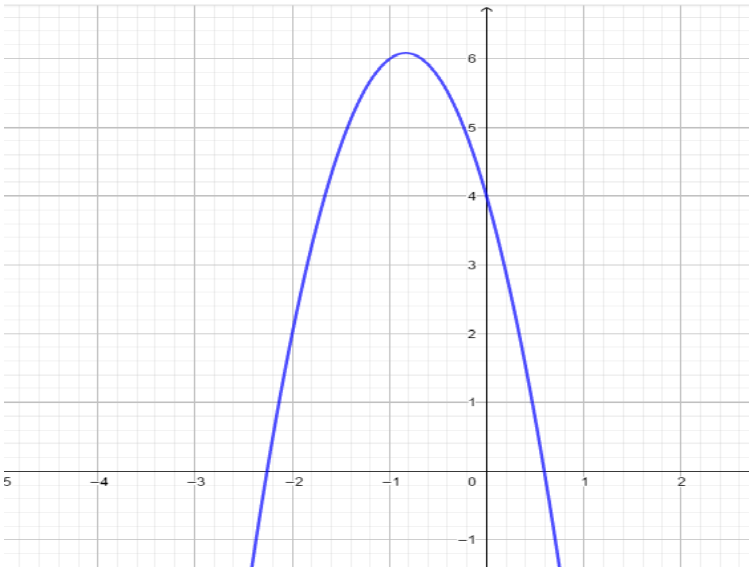
2° Paso
Determinamos el Dominio

3° Paso
Trazamos la gráfica

	f(x)	(x , y)
-3	-8	(-3 , -8)
-2	2	(-2 , 2)
-1	6	(-1 , 6)
0	4	(0 , 4)
1	-4	(1 , -4)
2	-18	(2 , -18)
3	-38	(3 , -38)

Como $-3x^2 - 5x + 4$ es un polinomio en "x", entonces "x" puede tomar cualquier valor real para que "y" sea un número real.

$Dom\ f(x): x\epsilon\mathbb{R}$ ó $Dom\ f(x): x\epsilon(-\infty; +\infty)$



Ejemplo 2: Determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}$$

Solución

1° Paso
Para qur "y" sea un número real debe cumplirse la condición:

.
$$\frac{x}{1-x^3} \geq 0$$

puesto que la cantidad subradical no puede ser jamás negativa, ya que de serlo sería un número complejo.

2° Paso
Resolvemos la inecuación:

$$\frac{x}{1-x^3} \geq 0$$

Factoramos el denominador

$$\frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)} \geq 0$$

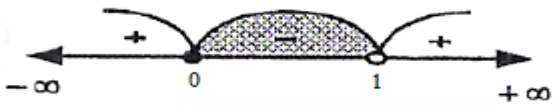
Como el segundo factor no tiene restricción, quedaría:

$$\frac{x}{(1-x)} \geq 0$$

Cambiamos de signo al factor ya que "x" tiene signo negativo.

$$\frac{x}{(x-1)} \leq 0$$

Armamos las regiones

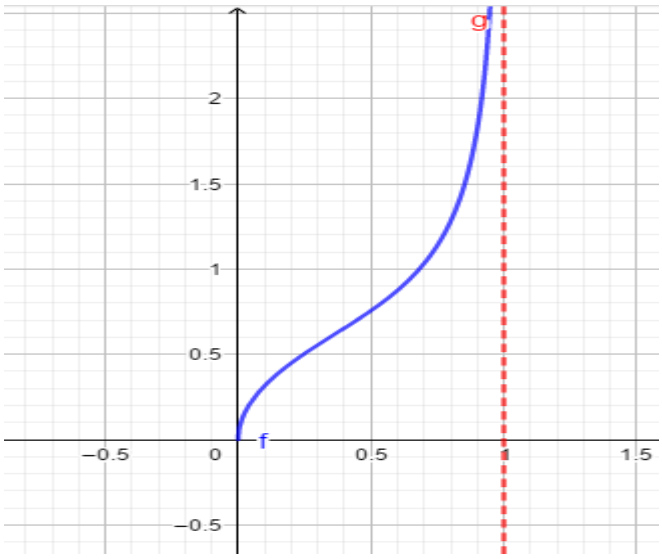


Como el signo de desigualdad es " $\leq$ ", la solución está en la regíon negativa, por lo tanto:

$Dom\ f(x): x\epsilon[0\ ,1[$

3° Paso
Trazamos la gráfica

	f(x)	(x , y)
0	0	(0 , 0)
0.10	0.31	(0.10 , 0.31)
0.20	0.45	(0.20 , 0.45)
0.30	0.56	(0.30 , 0.56)
0.40	0.65	(0.40 , 0.65)
0.50	0.76	(0.50 , 0.76)
0.60	0.87	(0.60 , 0.87)
0.70	1.03	(0.70 , 1.03)
0.80	1.28	(0.80 , 1.28)
0.90	1.82	(0.90 , 1.82)



Ejemplo 3: Determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{-x^2}{x^2 - 4}$$

Solución

1° Paso

Analizamos el denominador

.

En este caso el denominador no puede ser cero, porque la división entre cero no existe.

2° Paso

Factoramos el denominador

$$f(x) = \frac{-x^2}{(x+2)(x-2)}$$

Entonces se obtienen dos asíntotas[21] verticales en -2 y 2.

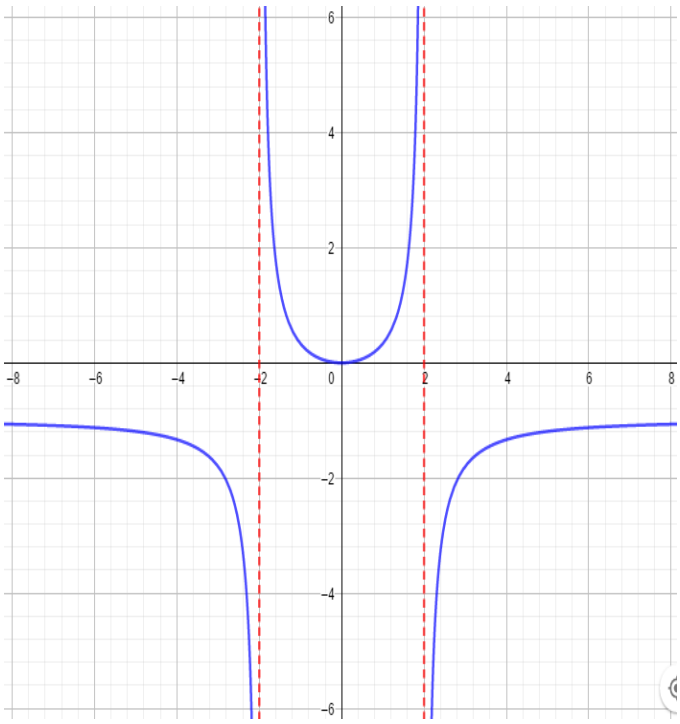
$$x + 2 \neq 0 \quad \wedge \quad x - 2 \neq 0$$

$$x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

$$Dom\ f(x): x \epsilon \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

3° Paso
Trazamos la gráfica

	f(x)	(x , y)
-6	-1.12	(-6 , -1.12)
-5	-1.19	(-5 , -1.19)
-4	-1.33	(-4 , -1.33)
-3	-1.80	(-3 , -1.80)
-1.8	0.65	(-1.80 , 0.65)
-1.4	0.96	(-1.40 , 0.96)
-1	0.33	(-1 , 0.33)
-0.80	0.19	(-0.80 , 0.19)
-0.40	0.04	(-0.40 , 0.04)
0.00	0.00	(0 , 0)
0.40	0.04	(0.40 , 0.04)
0.80	0.19	(0.80 , 0.19)
1.00	0.33	(1 , 0.33)
1.40	0.96	(-1.40 , 0.96)
1.80	0.65	(1.80 , 0.65)
3.00	-1.80	(3 , -1.80)
4.00	-1.33	(4 , -1.33)
5.00	-1.19	(5 , -1.19)



NOTA: Toda función debe tener su gráfica, para lo cual debemos utilizar el Software especializado llamado GeoGebra, el mismo que se puede instalar en su PC o en su celular.

[21] **Asíntotas.-** Son rectas horizontales, verticales u oblicuas, que limitan la extención de una curva.

7.5. Técnicas para hallar el Rango de una función

En la determinación del rango de una función se presentan dos casos:

Caso 1: Cuando el dominio está implícito en la regla de correspondencia que define a la función. En cuyo caso se debe despejar la variable "x" en función de "y", luego se analiza para que valores de "y", "x" es real.

Ejemplo 1*: Hallar el rango de la función*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

1° Paso

Despejamos "x"

.

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$y(x^2 - 4) = x^2$$
$$yx^2 - 4y = x^2$$
$$yx^2 - x^2 = 4y$$
$$x^2(y - 1) = 4y$$
$$x = \pm 2\sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

2° Paso

Analizamos las restricciones que podría tener "y"

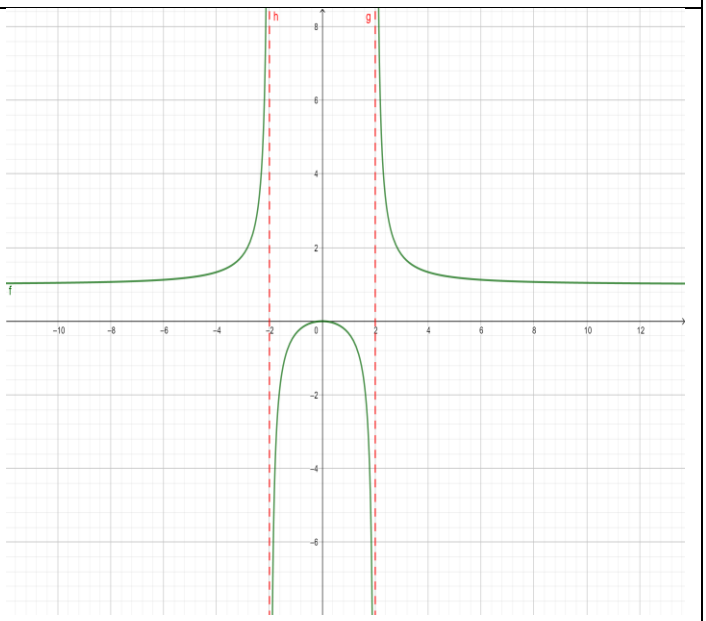
$$\frac{y}{y-1} \geq 0$$

Entonces se obtienen dos asíntotas[22] verticales en -2 y 2.

$$Rgo\ f(x): y \epsilon \mathbb{R}\ ]-\infty, 0] \cup]1, 0+\infty[$$

3° Paso
Trazamos la gráfica

	f(x)	(x , y)
-6	-1.12	(-6 , -1.12)
-5	-1.19	(-5 , -1.19)
-4	-1.33	(-4 , -1.33)
-3	-1.80	(-3 , -1.80)
-1.8	0.65	(-1.80 , 0.65)
-1.4	0.96	(-1.40 , 0.96)
-1	0.33	(-1 , 0.33)
-0.80	0.19	(-0.80 , 0.19)
-0.40	0.04	(-0.40 , 0.04)
0.00	0.00	(0 , 0)
0.40	0.04	(0.40 , 0.04)
0.80	0.19	(0.80 , 0.19)
1.00	0.33	(1 , 0.33)



[22] **Asíntotas.-** Son rectas horizontales, verticales u oblicuas, que limitan la extención de una curva.

1.40	0.96	(-1.40 , 0.96)	
1.80	0.65	(1.80 , 0.65)	
3.00	-1.80	(3 , -1.80)	
4.00	-1.33	(4 , -1.33)	
5.00	-1.19	(5 , -1.19)	

7.6. Función lineal

Ejemplo 1

Determine el dominio D(x), el recorrido R(x) y represente gráficamente la siguiente función: /*-

$$\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x} - 3 \quad \text{si} \quad D(x): x \in \mathbb{R}$$

Solución: Sigamos los siguientes pasos

Determinemos el dominio. $D(x) = \{-2\,, -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 2\}$

Para hallar el rango, evaluamos la función con los valores del dominio.

$\mathrm{f}(\ \mathrm{x}\ ) = 2\mathrm{x} - 3$

$\mathrm{f}(-2) = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$

$\mathrm{f}(-1) = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$

$\mathrm{f}(-0) = 2(\ 0\ ) - 3\ = 0\ -\ 3\ = -3$

$\mathrm{f}(\ 1\ ) = 2(\ 1\ ) - 3\ = 2\ -\ 3\ = -1$

$\mathrm{f}(\ 2\ ) = 2(\ 2\ ) - 3\ = 4\ -\ 3 =\ 1$

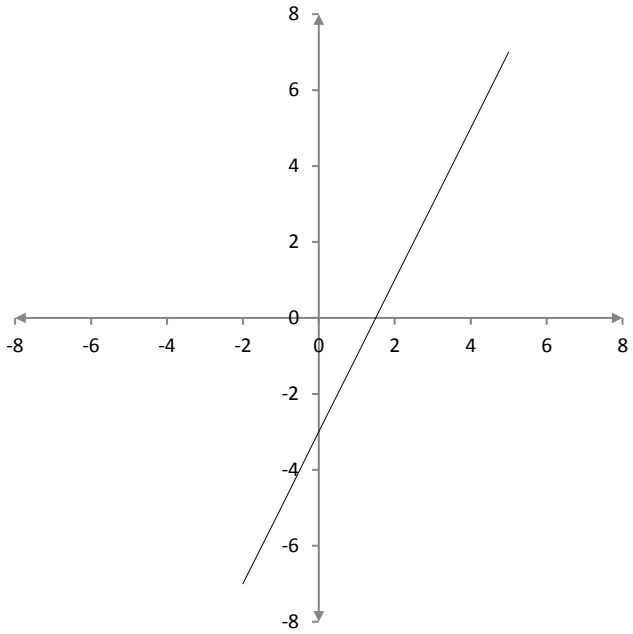
Tabulamos los resultados

x	f(x)	(x , y)
-2	-7	$(-2\,, -7)$
-1	-5	$(-1\,, -5)$
0	-3	$(0\,, -3)$
1	-1	$(1\,, -1)$
2	1	$(2\,,\ 1)$

$\mathrm{R(x)} = \{-7\,, -5\,, -3\,, -1\,, 1\}$

Para trazar la gráfica ubicamos los pares ordenados en el *plano cartesiano*[23].

[23] Plano formado por los ejes de abscisas (x) y ordenadas (y)



7.7. Función cuadrática

Ejemplo 2

Determine el dominio D(x), el recorrido R(x) y represente gráficamente la siguiente función:

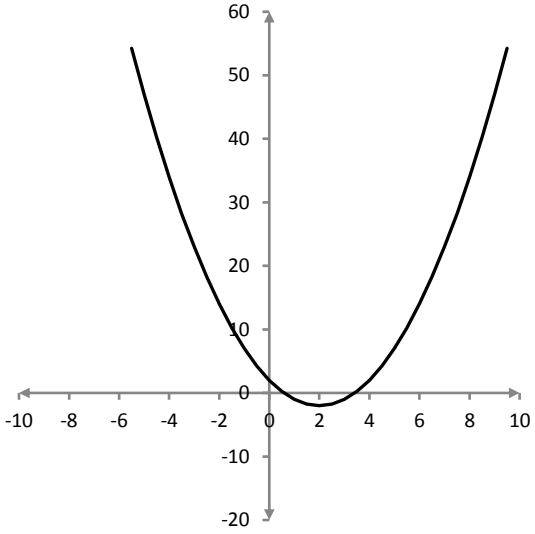
$f(x) = x^2 - 4x + 2$

i. $D(x)$: $x \in \mathbb{R}$

ii. $R(x)$: $y \geq -2$

iii. Tabla de valores iv. Gráfico

x	f(x)	(x , y)
-2	14	$(-2\,,14)$
0	2	$(0\,,2)$
2	-2	$(2\,,-2)$
4	2	$(4\,,2)$
5	7	$(5\,,7)$



TAREA

Dados los siguientes conjuntos, establecer:

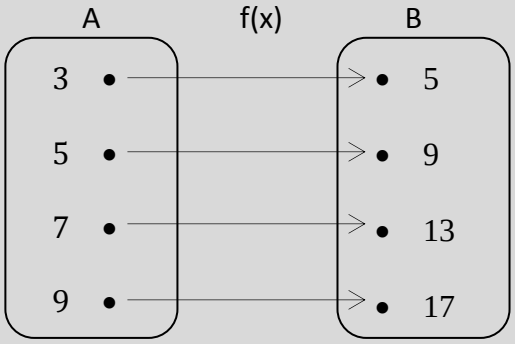
i. La relación existente entre ellos

ii. El dominio de la función

iii. El recorrido de la función

iv. El conjunto de pares ordenados de la relación

v. Ubique los puntos en el plano



Por medio de la siguiente relación $\mathrm{Rf(x)} = \{(4\,, -1), (9\,, 0), (16\,, 1), (25\,, 2)\}$

i. Trace un diagrama sagital

ii. Cuál es la función que define a la relación

iii. Ubique los puntos en el plano

iv. Indique el dominio y la imagen

Halle el dominio, el rango y grafique las siguientes funciones

i. $\mathrm{f(x)} = 4 - 2\mathrm{x}$

ii. $\mathrm{f(x)} = -2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}$

iii. $\mathrm{f(x)} = 8 - \mathrm{x}^3$

iv. $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}-1}$

v. $\mathrm{f(x)} = \sqrt{2x}$

BIBLIOGRAFÍA

BÁSICA

- HEAUSSLER, Paul: *Matemática para administración y economía,* Pearson, México, 2003.

COMPLEMENTARIA

- ALMEIDA, Francisco – NICOLA, Jorge: *Matemática 10º año*, DIMAXI, Quito, 2002.

- BARNETT, Raymond: *Álgebra y Trigonometría*, McGraw – Hill, México, 1990.

- EDICIONES CREATIVA: *Matemática I*, s.e., Quito, 2008.

- LEMA, Miguel: *Matemática con Nueva Visión*, s.e., Quito, 2005.

- PROAÑO VITERI, Ramiro: *Lógica – Conjuntos – Estructuras*, Edicumbre, Quito, s.a.

- SILVA, Juan: *Fundamentos de matemática*, Limusa, México, 1997.

- STANLEY, Smit: *Álgebra*, Pearson, México, 1990.

- RIOFRIO, Antonio: *Guía didáctica Matemática I*, Universidad Técnica Particular de Loja, Loja, 2006.

- ALMEIDA, Mauricio: *Matemática estructurada N° 2*, Edicumbre, Quito, Ecuador, 1998

- JURADO, Cristina: *Matemáticas 10*, Santillana, Quito, Ecuador, 2008.

ANEXOS

FACTORES DE CONVERSIÓN

MASA

1g = 10^{-3} kg = $6.85x10^{-5}$ slug
1kg = 10^{3} g = $6.85x10^{-2}$ slug
1 slug = $1.46x10^{4}$ g = 14.6 kg
1 u = $1.66x10^{-24}$ g = $1.66x10^{-27}$ kg
1 tonelada métrica = 1000 kg

LONGITUD

1 cm = 10^{-2} m = 0.394 in
1 m = 10^{-3} km = 3.28 ft = 39.4 in
1 km = 10^{3} m = 0.62 millas
1 in = 2.54 cm = $2.54x10^{-2}$ m
1 ft = 12 in = 30.48 cm = 0.3048 m
1 milla = 5280 ft = 1609 m = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm

ÁREA

1 cm^2 = 10^{-4} m^2 = 0.1550 in^2 = $1.08x10^{-3}$ ft^2
1 m^2 = 10^{4} cm^2 = 10.76 ft^2 = 1550 in^2
1 in^2 = $6.94x10^{-3}$ ft^2 = 6.45 cm^2 = $6.45x10^{-4}$ m^2
1 ft^2 = 144 in^2 = $9.29x10^{-2}$ m^2 = 929 cm^2

VOLUMEN

1 cm^3 = 10^{-6} m^3 = $3.53x10^{-5}$ ft^3 = $6.1x10^{-2}$ in^3
1m^3 = 10^{6} cm^3 = 10^{3} litros = 35.3 ft^3 = $6.1x10^{4}$ in^3 = 264 galones
1 litro = 10^{3} cm^3 = 10^{-3} m^3 = 1.506 cuartos = 0.264 galones
1 in^3 = $5.79x10^{-4}$ ft^3 = 16.4 cm^3 = $1.64x10^{-5}$ m^3
1 ft^3 = 1728 in^3 = 7.48 galones = 0.0283 m^3 = 28.3 litros
1 cuarto = 2 pintas = 946.5 cm^3 = 0.947 litros
1 galón = 4 cuartos = 231 in^3 = 3.758 litros

FUERZA

1 N = 10^{5} dinas = 0.225 lbf
1 dina = 10^{-5} N = $2.25x10^{-6}$ lb
1 libra = $4.45x10^{5}$ dinas = 4.45 N
Peso equivalente a 1 kilogramo masa = 2.2 lb = 9.8 N

PRESIÓN

1 Pascal (N/m^2) = $1.45x10^{-4}$ lb/in^2 = $7.5x10^{-3}$ torr (mm Hg) = 10 dinas/cm^2
1 torr (mm Hg) = 133 Pa (N/m^2) = 0.02 lb/in^2 = 1333 dinas/cm^2
1 atm = 14.7 lb/in^2 = $1.013x10^{5}$ N/m^2 = $1.013x10^{6}$ dinas/cm^2 = 30 in Hg = 76 cm Hg
1 bario = 10^{6} dinas/cm^2 = 10^{5} Pa
1 milibario = 10^{3} dinas/cm^2 = 10^{2} Pa

ENERGÍA

1 J = 10^{7} ergios = 0.738 ft-lb = 0.239 cal = $9.48x10^{-4}$ Btu = $6.24x10^{18}$ eV
1 kcal = 4186 J = $4.186x10^{10}$ ergios = 3.968 Btu
1 Btu = 1055 J = $1.055x10^{10}$ ergios = 778 ft-lb = 0.252 kcal
1 cal = 4.186 J = $3.97x10^{-3}$ Btu = 3.09 ft-lb
1 ft-lb = 1.36 J = $1.36x10^{7}$ ergios = $1.29x10^{3}$ Btu
1 eV = $1.6x10^{-19}$ J = $1.6x10^{-12}$ ergios
1 Kwh = $3.6x10^{6}$ J
1 fotón = $4.42x10^{-12}$ ergios

POTENCIA

1W = 0.738 ft-lb/seg = $1.34x10^{-3}$ hp = 3.41 Btu/h
1 ft-lb/seg = 1.36 W = $1.82x10^{-3}$ hp
1 hp = 550 ft-lb/seg = 745.7 W = 2545 Btu/h

TIEMPO

1 h = 60 min = 3600 seg
1 día = 24 h = 1440 min = $8.64x10^4$ seg
1 año = 365 días = $8.76x10^3$ h = $5.26x10^5$ min = $3.16x10^7$ seg

ÁNGULO

1 rad = 57.3°
1° = 0.0175 rad 15° = π/12 rad
30° = π/6 rad 45° = π/4 rad
60° = π/3 rad 90° = π/2 rad
180° = π rad 360° = 2π rad
1 revolución/min = π/30 rad/seg = 0.1047 rad/seg

VELOCIDAD

2 m/s = 3.6 km/h = 3.28 ft/s = 2.24 millas/h
1 km/h = 0.278 m/seg = 0.621 mi/h = 0911 ft/seg
1 ft/s = 0.682 mi/h = 0.305 m/s = 1.1 km/h
1 mi/h = 1.467 ft/s = 1.609 km/h = 0.447 m/s
60 mi/h = 88 ft/s

Equivalentes Energía-Masa (en reposo)

1 u = $1.66x10^{-27}$ kg ↔ 931.5 MeV
1 electrón masa = $9.11x10^{-31}$ kg = $5.49x10^4$ u ↔ 0.511 MeV
1 protón masa = $1.672x10^{-31}$ kg = 1.007276 u ↔ 9.38.28 MeV
1 neutrón masa = $1.674x10^{-27}$ kg = 1.008665 u ↔ 9.39.57 MeV

TEMPERATURA

$T_F = 9/5(T_C + 32)$

$T_C = 5/9(T_F – 32)$

$T_K = T_C + 273.16$

FUENTE: Física Jerry D. Wilson

Instituto Superior Universitario Cotopaxi

Física

Electromecánica

Guía de estudio

Franklin Hernán Garzón Vaca

Guía de estudio de Física

Electromecánica CEM-101

Franklin Hernán Garzón Vaca

2024

Esta publicación ha sido sometida a revisión interna y validación por parte de los jefes de área y coordinadores de carrera institucionales. Sin embargo, no ha completado su proceso total de editorialización.

Diseño de portadas: Raúl Jiménez Tello.

Versión 1.0

Instituto Superior Universitario Cotopaxi

Latacunga - Ecuador

Esta publicación está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Instituto Superior Tecnológico Cotopaxi

Nuestra Historia

El **Instituto Superior Tecnológico Cotopaxi** es un icono de la transformación y revalorización de las políticas públicas de **educación técnica y tecnológica** en el Ecuador en general y particularmente en el desarrollo de la **formación técnica de Cotopaxi.**

Razón de ser:

Misión:

Somos una institución de educación superior, orientada en la formación integral de profesionales de tercer nivel competentes e innovadores con compromiso ético, social y ambiental que fomentan el desarrollo territorial sostenible.

Visión

Ser un instituto superior universitario con altos estándares de calidad, referente de la transformación técnica y tecnológica que contribuya al desarrollo sustentable y sostenible de la sociedad.

Gestión de Actividades de aprendizaje

Componente docencia

Son actividades enfocas al alcance de las actitudes que permitan alcanzar los resultados de aprendizaje a lo largo del desarrollo de las unidades que conforman la guía de estudio, el mismo puede ser acompañado por el docente o en forma colaborativa.

Prácticas Aprendizaje:

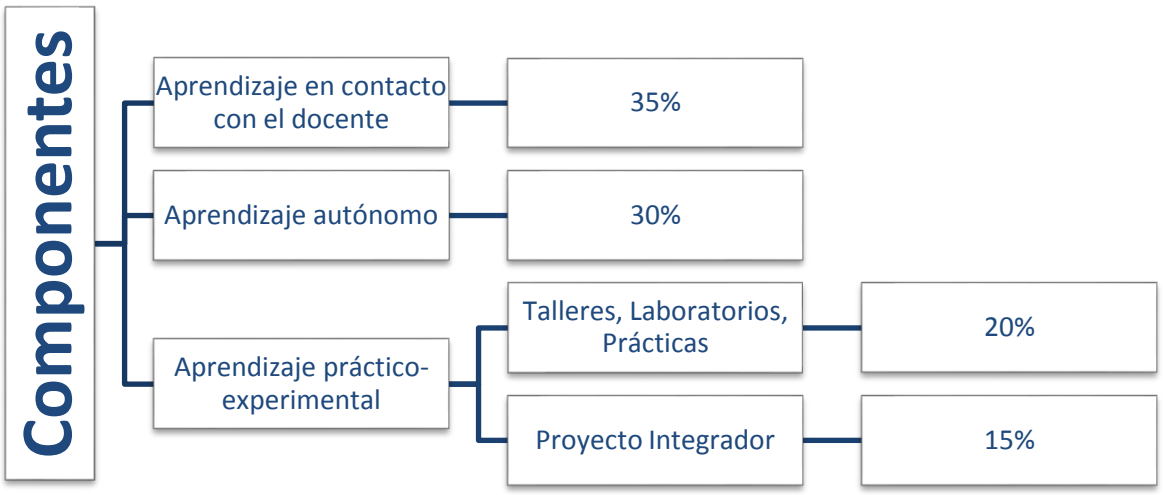
Son actividades que permiten que los estudiantes en contribución con su docente la consolidación de los resultados de aprendizaje en forma práctica, con el desarrollo y aplicación de conocimientos teóricos y métodos experimentales.

Componente Trabajo Autónomo:

Son actividades que permiten fortalecer las áreas específicas o amplias de conocimiento, a través de investigaciones bibliográficas, tareas o talleres. El estudiante organiza la forma y tiempo de las actividades a desarrollar.

Evaluación del Estudiante por Resultados de Aprendizaje

Criterios



Instrucciones generales

Estimado estudiante revisar este acápite es de importancia porque le permitirá observar la secuencialidad de los procesos de la asignatura de Fisica; para que alcance un aprendizaje significativo durante su formación académica.
La guía de estudio será un uno de los medios de orientación y recurso para el aprendizaje de la asignatura de Fisica. Cada unidad didáctica inicia con una breve introducción y el resultado de aprendizaje de la asignatura

Para realizar un diagnóstico de conocimientos el docente abrirá una discusión en grupos sobre una pregunta que parta de interrogantes significativas para los alumnos, esto permitirá conocer si el estudiante cuenta con conocimientos previos de la asignatura, sea por su formación escolar o por su experiencia cotidiana.

En las actividades de desarrollo tienen la finalidad para que el estudiante interaccione con una nueva información o con una serie de conocimientos previos en mayor o menor medida acerca del tema, estas fuentes de información pueden ser la exposición docente, discusión sobre una lectura, video relacionados al tema y apoyo de medios digitales como Moodle, Google Drive, BoxChrome, etc.

Las unidades de la guía de estudio deben estar desarrolladas en consecuencia con los resultados de aprendizaje, por tal motivo se recomienda seguir el orden en el que se encuentran.

Antes de iniciar el nuevo tema es importante haber comprendido la unidad anterior, caso contrario repase de nuevo o consulte a su profesor de la asignatura, quien le ayudara a clarificar los temas en los que tenga dificultad.

El tiempo para el desarrollo de la asignatura es de 08 semanas comprendidas en 48 horas de docencia, 32 horas de aprendizaje autónomo y 16 horas de aprendizaje práctico. Se recomienda al estudiante, programar un horario de estudio de cinco horas semanales como mínimo, para la asignatura.

La ponderación de las actividades que evaluarán durante el periodo serás calificadas sobre diez puntos *10/10*.

Para la evaluación de actividades de tareas e informes de prácticas de aprendizaje se revisará: originalidad, presentación *claridad, orden y fecha de entrega.* Desarrollo del documento o informe según las normas APA de la institución. Además, se realizarán evaluaciones de tareas en aula y autónomas como actividades expositivas, debates, análisis de casos, mediante una rubrica.

La síntesis del proceso de aprendizaje se realizará mediante la aplicación de un cuestionario al final de la guía de estudio, esta evaluación comprende las evidencias de aprendizaje significativo alcanzadas a lo largo del desarrollo de las actividades realizadas y permitirá hacer los ajustes pertinentes a la secuencia didáctica en función de los resultados obtenidos.

ÍNDICE

Contenido

ÍNDICE 7
INTRODUCCIÓN 14
OBJETIVOS GENERALES 15
PRIMER 16
PARCIAL 16

UNIDAD I MAGNITUDES Y MEDIDA 17
Introducción 17
¿Para qué sirve la ciencia? 17
Concepto de Física 18
Fenómeno 18
Fenómeno Físico 18
Fenómeno Químico 19
Fenómeno Físico Químico 19
Partes de la Física 19
El método científico 20
La observación 20
Medida y registro de datos 20
Formulación de una hipótesis 21
Experimentación 21
Magnitudes Físicas 22
Clasificación de la magnitudes 22
Por su origen 22
Magnitudes fundamentales 22
Magnitudes derivadas 23
Magnitudes suplementarias 23
Por su naturaleza 23
Magnitudes escalares: 23
Magnitudes vectoriales 24
Sistemas de unidades 24
Origen del sistema de unidades 24
Factores de conversión 24
LONGITUD 25
MASA 25

TIEMPO 25
VOLUMEN 25
FUERZA 25
PRESIÓN 25
ENERGA 25
POTENCIA 25
Ejercicios resueltos 25
TAREA Nº 1: Convertir las siguientes unidades de medida 26
Análisis dimensional 26
Ecuaciones dimensionales 27
Ejercicios resueltos 27
TAREA Nº 2: Realice el análisis dimensional en las siguientes fórmulas 29

UNIDAD II VECTORES 30
Vectores en el plano 30
Magnitud escalar 30
Magnitud vectorial 30
Algunos tipos de vectores 31
a) Vectores colineales 31
b) Vectores concurrentes 31
c) Vectores coplanares 31
d) Vectores iguales 31
e) Vector opuesto (−A): 31
Coordenadas rectangulares 32
Coordenadas polares 32
Coordenadas geográficas 33
Vector en función de sus vectores base 33
Vector en función de su módulo por unitario 33
Ángulos directores 34
Cosenos directores 34
Ejercicios resueltos 34
TAREA Nº 3: Resuelva los siguientes ejercicios 36
Operaciones con vectores 36
Suma o adición de vectores 36
Solución gráfica 37
a) Método del paralelogramo: 37
b) Método del polígono: 37

Ejercicio resuelto 38
Resta o diferencia entre vectores 38
Producto de un escalar por un vector 39
Producto escalar o producto punto 39
Cálculo del ángulo formado entre dos vectores 40
Cálculo del vector proyección 41
Producto vectorial o producto cruz 42
Cálculo del área de un paralelogramo 43
TAREA Nº 4: Realice los siguientes operaciones entre vectores 44
UNIDAD III CINEMÁTICA 45
Noción de cinemática 45
Definición 45
Partícula 45
Sistema de referencia 45
Vector desplazamiento $\Delta \boldsymbol{r}$ 46
Ejercicios resueltos 47
TAREA Nº 5: Resuelva los siguientes ejercicios 47
Reposo 48
Movimiento 48
Trayectoria 48
Medidas del movimiento 49
Distancia recorrida 49
Velocidad $\boldsymbol{v}$ 49
Repidez 50
Aceleración 50
Clasificación del movimiento 51
Por su trayectoria 51
Rectilíneo: 51
Curvilíneo: 51
Por su rapidez 51
Uniforme: 51
Variado: 52
Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) 52
Ecuación que rige el MRU 52
Ejercicios resueltos 53
Gráficas de MRU 54

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) 56
Ejercicios resueltos 57
Gráficas del MRUV 58
Ejercicio resuelto 59
Movimiento vertical 62
Caída libre 63
Aceleración de la gravedad 63
Casos de caída libre 64
Fórmulas de caída libre 64
Ejercicios resueltos 64
TAREA Nº 6: Resuelva los siguientes ejercicios 65
Movimiento en el plano (tiro parabólico) 67
Fórmulas del tiro parabólico 68
Ejercicios resueltos 68
TAREA Nº 7: Resuelva los siguientes ejercicios 70
Posición angular 71
Desplazamiento angular 72
Radian 72
Velocidad angular media $\boldsymbol{\omega}$ 73
Aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ 73
Movimiento circular uniforme (MCU) 73
Frecuencia 74
Aceleración centrípeta 74
Relación entre las medidas lineales y angulares 75
Fórmulas de la relación entre Movimiento Rectilíneo y Movimiento Circular 75
Ejercicios resueltos 76
Movimiento circular uniformemente variado (MCUV) 77
Formulas que rigen el M.C.U.V. 78
Ejercicios resueltos 78
TAREA Nº 8: Resuelva los siguientes ejercicios 80
SEGUNDO 83
PARCIAL 83

UNIDAD IV DINÁMICA 84
Naturaleza de las fuerzas: 84
Fuerza gravitacional 84
Peso (W) 84

Fuerza Normal (N) 85
Fuerza de rozamiento (fr) 85
Clases de rozamiento por deslizamiento 86
Rozamiento estático 86
Rozamiento cinético 86
Fuerza elástica 86
Fuerzas tensoras 87
Unidades de fuerza 87
Leyes de Newton 87
1ra Ley de Newton (Ley de la Inercia) 88
Inercia: 88
2da Ley de Newton (Ley de la dinámica o ley de la fuerza) 88
3da Ley de Newton (Ley de la acción y reacción) 88
Diagrama de cuerpo libre 89
Ejercicios resueltos 89
TAREA Nº 9: Resuelva los siguientes ejercicios 93
UNIDAD V ESTÁTICA 95
Equilibrio del sólido rígido 95
Equilibrio 95
Convención de signos 96
Reacciones en los apoyos 96
a) Contacto: 96
b) Rodillo: 97
c) Pasador: 97
d) Empotramiento: 97
Ejercicios resueltos 98
TAREA Nº 10: Resuelva los siguientes ejercicios 100
UNIDAD VI HIDROSTÁTICA 102
Definición 102
Características de los fluidos 102
Presión (P) 102
Unidades de Presión 103
Densidad (δ) 103
Densidad Relativa (δr) 103
Peso Específico (γ) 104

Ejercicios resueltos 104
Presión Hidrostática (P) 106
Unidades de Presión 107
Ejercicios resueltos 107
Empuje 109
Es la resultante de todas las fuerzas que un líquido aplica a un cuerpo sumergido en el.. 109
..... 109
Principio de Arquímides 109
Unidades del Empuje 110
Ejercicios resueltos 111
Principio de Pascal 111
Ejercicio resuelto 112
TAREA Nº 11: Resuelva los siguientes ejercicios 112
UNIDAD VII HIDRODINÁMICA 114
Definición 114
Fluido Estable 114
Fluido Irrotacional 114
Fluido Incompresible 114
Fluido Viscoso 114
Gasto o Caudal 114
Principio de Continuidad 115
Principio de Bernoulli 115
Ejercicios resueltos 116
BIBLIOGRAFÍA 116
ANEXOS 117
Anexo 1 FACTORES DE CONVERSIÓN 118
MASA 118
LONGITUD 118
ÁREA 118
VOLUMEN 118
FUERZA 118
PRESIÓN 118
ENERGÍA 118
POTENCIA 118
TIEMPO 119
ÁNGULO 119

VELOCIDAD 119
TEMPERATURA 119
Anexo 2: Cuerpos Geométricos 120
FIGURA 120
Anexo 3: Funciones trigonométricas 121
Anexo 4: Resolución de tringulos rectángulos 122

INTRODUCCIÓN

La física constituye una base de particular importancia para el desarrollo de las sociedades. Sus leyes, principios y aplicaciones han permitido el desarrollo vertiginoso de la ciencia y la tecnología, sin embargo la enseñanza de esta ciencia requiere de docentes altamente capacitados y de estudiantes comprometidos por alcanzar un conocimiento de bases sólidas.

Es tal su practicidad y aplicabilidad que la relación que se genera entre el hombre y la sociedad obedece a modelos matemáticos, leyes y principios que explican el por qué y para qué el estudio de esta ciencia.

En este contexto, la enseñanza de la Física juega un papel importante en la formación del profesional, por cuanto esta ciencia estimula las facultades mentales superiores de la persona, capacitándola para resolver problemas no sólo en el ámbito de los fenómenos naturales, razonamiento matemático sino también en otras ciencias y en su la vida diaria.

El presente texto de trabajo de ninguna manera pretende ser una obra completa de física, sino más bien un aporte para maestros y estudiantes, como un recurso didáctico para optimizar el proceso de aprendizaje de esta área de estudio.

Se ha tratado de estructurar un programa sencillo que permita al estudiante del Instituto Superior Tecnológico Cotopaxi, responder con criterio propio, lo importante del estudio de la física y por otro lado se inserte en el manejo de las técnicas elementales que se utilizan en esta ciencia, como: cálculos matemáticos, algebraicos, geométricos y trigonométricos.

El propósito del texto es ayudar al estudiante de la carrera, para que enfrente en excelentes condiciones los retos que se presenten en su vida estudiantil y profesional.

OBJETIVOS GENERALES

- Reconocer la importancia de la física como instrumento básico para la organización, sistematización, inferencia y validación de los conocimientos en las diversas disciplinas científicas y tecnológicas.

- Comprender y aplicar conceptos y los procesos que permitan el uso de las Leyes Físicas en la Cinemática, Dinámica, Estática.

- Comprender los principios y leyes de esta ciencia para aplicarlos en la resolución de problemas y aplicarlos en problemas práticos de la especialidad que desea seguir.

PRIMER PARCIAL

UNIDAD I MAGNITUDES Y MEDIDA

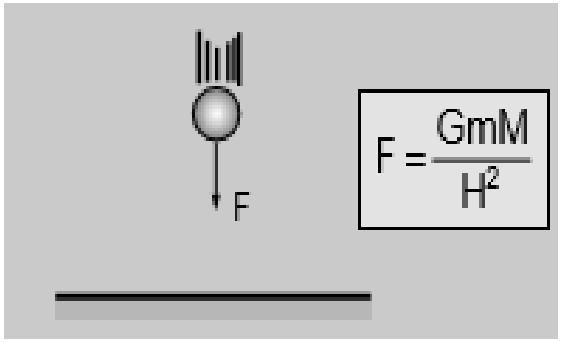
Introducción

Los fenómenos naturales son intrínsecos a la naturaleza, nacen con ella, es imposible que el hombre pueda regirlas o alterarlas, como ejemplos tenemos: la caída de los cuerpos, los fenómenos ópticos, la atracción magnética, la transformación de la energía, entre otros; por otro lado es obvio afirmar que siempre existió una interacción mutua entre el hombre y la naturaleza. El ser humano mediante su inteligencia trató de encontrar la solución al porqué de los fenómenos naturales, surgió entonces la ciencia que no es más que el conocimiento y estudio de las leyes de la naturaleza. Sería absurdo dar una fecha al nacimiento de la ciencia, pues ésta aparece tras una evolución contínua del hombre en el espacio y en el tiempo. Entiéndase que la ciencia encierra un conocimiento cualitativo y cuantitativo de las leyes naturales; pues si no se puede medir y expresar en números las leyes de un fenómeno, por más que su explicación cualitativa sea contundente, ésta será pobre e insatisfactoria; de ahí que las matemáticas se convierten en una herramienta imprescindible en la formulación de una Ley.

Explicación cualitativa

La manzana cae hacia la tierra, por la atracción de la garvedad.

Explicación cuantitativa



Es posible calcular la fuerza gravitacional

¿Para qué sirve la ciencia?

Realmente esta pregunta es muy amplia, pero de manera general se puede afirmar que sirve para:

- Prevenir el acontecimiento futuro de un fenómeno natural (terremoto, lluvia, huracán, etc.)
- Poder usarlas de acuerdo a nuestros intereses. Usamos el viento para trasladarnos en avión; usamos la caída del agua para generar energía eléctrica; usamos los diferentes tipos de ondas para comunicarnos.
- Modernizarnos, pues la ciencia tiene su aplicación directa, por ejemplo: La Ingeniería, La Medicina, La Astronomía, etc.

El hombre, para facilitar el estudio de la ciencia ha creído conveniente dividirlas en varias ramas, y esto es enteramente convencional. La palabra Física proviene del término griego "physis" que significa **"Naturaleza"**, por lo tanto, la Física podría ser la ciencia que se dedica a estudiar los fenómenos naturales; este fue el enfoque de la Física hasta principios del siglo XIX con el nombre de ese entonces "Filosofía Natural". A partir del siglo XIX se redujo al campo de la Física, limitándola al estudio de los llamados **"Fenómenos Físicos"**, los demás se separaron de ella y pasaron a formar parte de otras ciencias naturales. Es innegable que el estudio de la Física involucra la experimentación del fenómeno y la cuantificación del mismo, por eso es importante combinar la teoría, con ayuda de las clases dictadas por los profesores y la práctica o experimento del fenómeno en estudio; pues así lo hicieron los grandes científicos como Arquímides, Galileo, Newton, Einstein entre otros.

Concepto de Física

Es una rama de la ciencia de tipo experimental, que observa, estudia y gobierna mediante leyes los llamados fenómenos físicos.

Fenómeno

Es el cambio o modificación que sufren los cuerpos de la naturaleza, bajo la influencia de diversas formas de energía; existen muchos fenómenos. En esta oportunidad nos ocuparemos solo de tres fenómenos:

Fenómeno Físico

Es el cambio que sufre la materia sin alterar su estructura íntima. Se caracteriza por ser reversible

Ilustraciones

La piedra cambío su posición, pero no cambió su estructura química. Inicialmente era piedra finalmente también lo es.

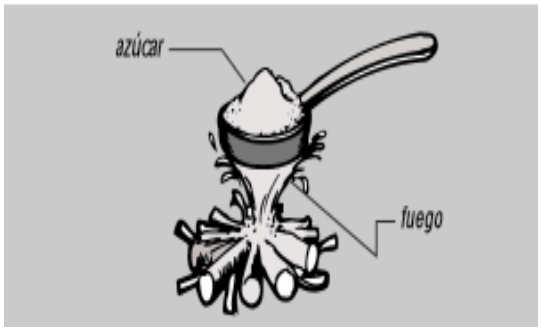
La evaporación del agua es un fenómeno físico. Inicialmente era agua, finalmente sigue siendo agua.

Fenómeno Químico

Es el cambio que sufre la materia experimentando una alteración en su estructura química. Se caracteriza por ser irreversible, es decir el cuerpo no vuelve a ser jamás lo que inicialmente era.

Ilustraciones

Si se quema un madera, ésta cambia. El fenómeno es químico; inicialmente el cuerpo era madera, finalmente no lo es.



Cuando se somete al azúcar a la acción del calor, el azúcar se transforma en un cuerpo negro (carbón de azúcar).

Fenómeno Físico Químico

Este fenómeno tiene algunas características del fenómeno físico y otras del químico.

Partes de la Física

a) ***Mecánica:*** Estudia los fenómenos relacionados con el movimiento de los cuerpos así como las fuerzas que actúan el ellos. Se divide en:

- Mecánica de los sólidos rígidos (Cinemática, Estática, Dinámica)
- Mecánica de los sólidos deformables
- Mecánica de los fluidos

b) ***Calor:*** Estudia las interacciones en el interior de la materia.

c) ***Acústica:*** Estudia los fenómenos referentes al sonido.

d) ***Electricidad:*** Estudia los fenómenos relacionados con la carga eléctrica.

e) ***Óptica:*** Estudia la interacción de la luz con la materia.

f) ***Magnetismo:*** Estudia los fenómenos relacionados con los campos magnéticos.

g) ***Física moderna:*** Cubre los desarrollos alcanzados en el siglo XX.

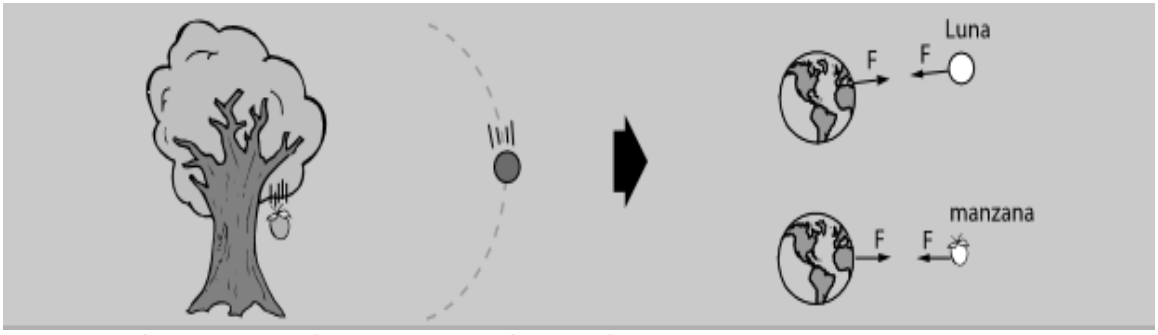
El método científico

Es un método de la Física, dirigido a las personas de ciencias y contempla los pasos a seguir para formular una ley física. En la práctica nosotros podemos comprobar la veracidad de una ley utilizando este método. El método científico es esencialmente un método experimental y tiene como gestor a Galileo Galilei.

A continuación se dará a conocer cada uno de los pasos utilizando como ejemplo ilustrativo, la ley de la Gravitación Universal, formulada por Isaac Newton.

La observación

Consiste en realizar un examen visual-mental del fenómeno, notando su estado actual y sus transformaciones así como los diferentes factores que parecen influenciarlos. Muchas veces las condiciones y circunstancias en que se realiza el fenómeno no es el óptimo, motivo por el cual la observación debe realizarse minuciosa y reiteradamente.



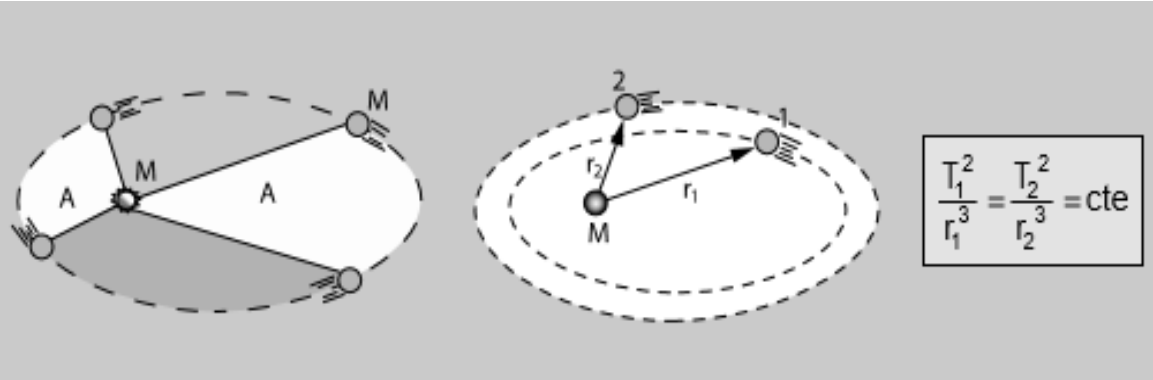
Newton observó que la manzana caía hacia la tierra. Tambíen desubrió que la luna cae eternamente hacia nuestro planeta.

Medida y registro de datos

Para describir un fenómeno físico existen dos tipos: la descripción cualitativa y cuantitativa.

Se dice que una descripción es cualitativa, cuando se describe con palabras y no con números, por ejemplo: el edificio es alto, la temperatura del horno es alta, el caudal de las aguas del río es grande. Obviamente que esta clase de descripción deja muchas preguntas sin respuesta, se necesitará entonces de los números y estos se basan en una medición.

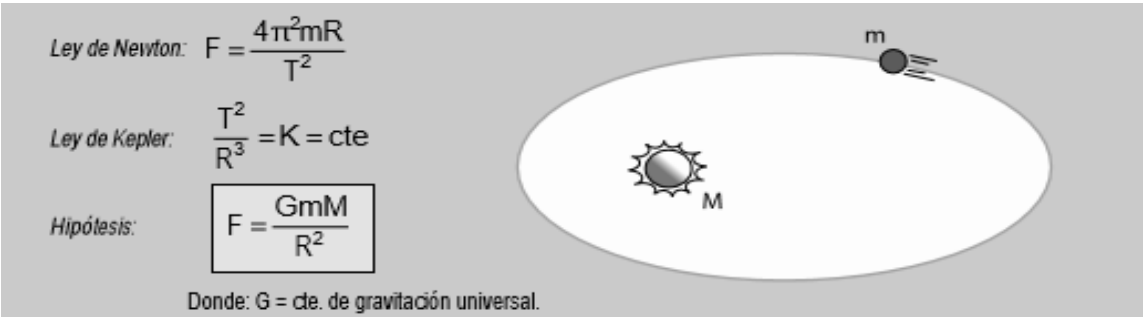
El método científico exige comparación y estas se efectúan mejor en forma cuantitativa, es decir, con números. Esto no significa que el científico necesariamente tenga que partir de una medición inédita, muchas veces él aprovecha las mediciones de sus colegas antecesores, las cuales le sirven como base para describir cuantitativamente el fenómeno en estudio.



Newton aprovechó los estudios realizados por los científicos que le antecedieron como los de Nicolás Copérnico, Galileo quién inventó el telescopio, Tycho Brahe que se ocupó por 20 años de hacer mediciones de los cuerpos celestes con ayuda del telescopio, asi como los de Johanes Kepler (amigo de Galileo) quien formulara sus famosas "Leyes de Kepler".

Formulación de una hipótesis

A partir de hechos y leyes conocidas, un científico puede descubrir nuevos conocimientos en una forma teórica. Se entiende por teoría al hecho que el Físico proponga un modelo de la situación física que está estudiando, utilizando relaciones previamente, establecidas; ordinariamente expresa su razonamiento mediante técnicas matemáticas.

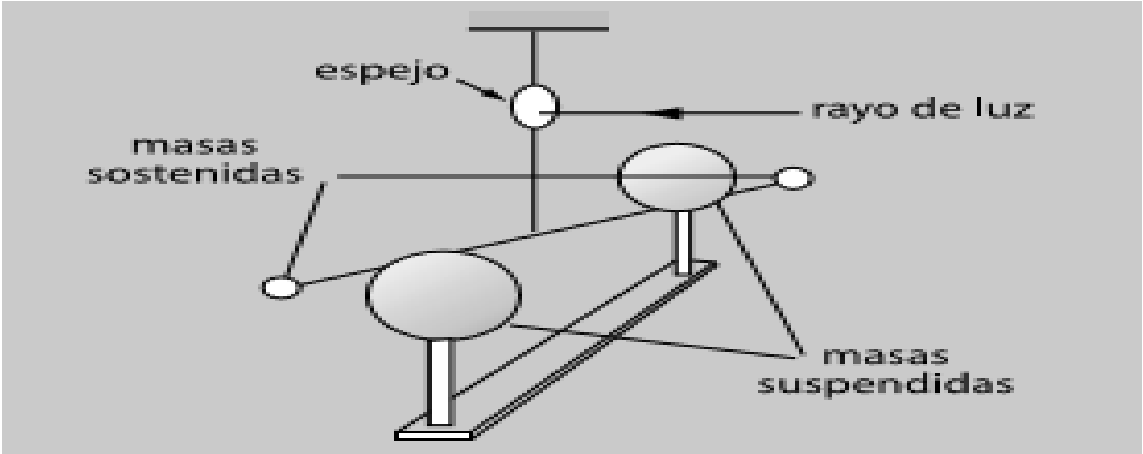


Con la ayuda de las leyes de Kepler, así como de su segunda Ley, Newton llevó a cabo su modelo matemático hasta llegar a una hipótesis.

Experimentación

Consiste en la observación del fenómeno bajo condiciones preparadas con anterioridad y cuidadosamente controladas.

De esta manera el científico puede variar las condiciones a voluntad, haciendo más fácil descubrir como ellas afectan el proceso. Si esta última se llena satisfactoriamente, la hipótesis pasa a ser un hecho comprobado y puede ser una Ley de la Física que se enuncia mediante fórmulas matemáticas.



Henry Cavendish fue quien determinó experimentalmente el valor de la constante G, 70 años después de la muerte de Newton; con lo cual se comprobó la veracidad de la hipótesis de Newton.

De todo lo expuesto es fácil deducir que todo científico tiene como meta descubrir las leyes de la naturaleza y ello empieza con la "curiosidad" que es lo que lleva a la observación del fenómeno (inicio del método científico).

Magnitudes Físicas

Es todo aquello que se puede expresar cuantitativamente, dicho en otras palabras es susceptible a ser medido.

¿Para qué sirven las magnitudes físicas? sirven para traducir en números los resultados de las observaciones; así el lenguaje que se utiliza en la Física será claro, preciso y terminante.

Clasificación de la magnitudes

Por su origen

Magnitudes fundamentales

Son aquellas que sirven de base para escribir las demás magnitudes. En mecánica, tres magnitudes fundamentales son suficientes: la longitud, la masa y el tiempo. Las magnitudes fundamentales son:

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
LONGITUD	metro	m	L
MASA	kilogramo	kg	M
TIEMPO	segundo	s	T
TEMPERATURA	kelvin	°K	Θ
CANTIDAD DE SUSTANCIA	mol	mol	N
INTENSIDAD LUNINOSA	candela	cd	J
INTENSIDAD DE CORRIENTE	amperio	A	I

Magnitudes derivadas

Son aquellas magnitudes que están expresadas en función de las magnitudes fundamentales, entre otras son:

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
SUPERFICIE	metro^2	m^2	L^2
VOLUMEN	metro^3	m^3	L^3
VELOCIDAD	metro/segundo	m/s	LT^{-1}
ACELERACIÓN	metro/segundo^2	m/s^2	LT^{-2}
FUERZA	Newton	N	MLT^{-2}
TRABAJO Y ENERGÍA	Joul	J	ML^{2}T^{-2}
POTENCIA	Watts	W	ML^{2}T^{-3}
PRESIÓN	Pascal	Pa	ML^{-1}T^{-2}
DENSIDAD	kilogramo/metro^3	kg/m^3	ML^{-3}

Magnitudes suplementarias

(Son dos), realmente no son magnitudes fundamentales ni derivadas; sin embargo se les considera como magnitudes fundamentales:

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
ÁNGULO PLANO	radián	rad	φ
ÁNGULO SÓLIDO	estereoradian	sr	Ω

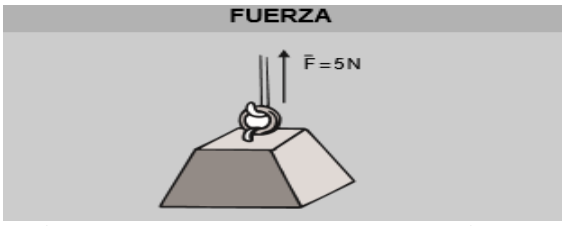
Por su naturaleza

Magnitudes escalares: Son aquellas magnitudes que están perfectamente determinadas con sólo conocer su valor numérico y su respectiva unidad.

Ejemplos:

Como se puede ver en todos estos casos, sólo se necesita el valor numérico y su respectiva unidad para que la magnitud quede perfectamente determinada.

Magnitudes vectoriales: Son aquellas magnitudes que además de conocer su valor numérico y unidad, se necesita la dirección y sentido para que dicha magnitud quede perfectamente determinada.



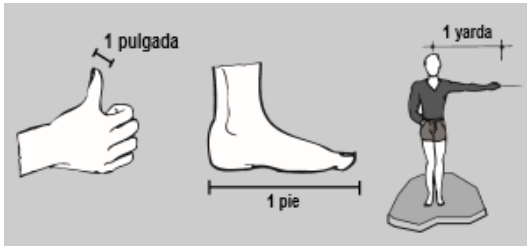
La fuerza es una magnitud vectorial, de no ser por la flecha que nos indica que la fuerza es vertical y hacia arriba; realmente no tendríamos idea si se aplica hacia arriba o hacia abajo.

Para localizar la casa en un plano de referencia podemos decir que el objeto se encuentra a 6 Km en la dirección N 60° E.

Sistemas de unidades

La necesidad de tener una unidad homogénea para determinada magnitud, obligó al hombre a definir unidades convencionales.

Origen del sistema de unidades



1 pulgada = 2,54 cm

1 pie = 30,48 cm

1 yarda = 91,14 cm

El 14 de octubre de 1960, la Conferencia General de Pesas y Medidas, estableció el Sistema Internacional de Unidades (S.I.), que tiene vigencia hasta la actualidad, cuya clasificación es la siguiente:

- Sistema MKS: metro, kilogramo, segundo
- Sistema CGS: centímetro, gramo, segundo
- Sistema FPS: pie, libra, segundo

Factores de conversión

Un *factor de conversión* es una operación matemática, para hacer cambios de unidades de la misma magnitud, o para calcular la equivalencia entre los múltiplos y submúltiplos de una determinada unidad de medida.

Entre los múltiples factores de conversión, a continuación se presentan los más utilizados en la asignatura de Física.

Cuadro1: Factores de conversión del sistema de unidades

LONGITUD
1 milla = 1609 m
1 Km = 1000m
1 m = 100 cm
1 m = 3.281 ft
1 m = 39.37 in
1 in = 2.54 cm
1 ft = 12 in
1 yd = 91.14 cm

MASA
1 Tm = 1000 kg
1 kg = 1000 g
1 kg = 2.205 lb
1 lb = 16 Oz
1 slug = 14.59 kg

TIEMPO
1 h = 60 min
1 h = 3600 seg
1 min = 60 seg

VOLUMEN
1 m^3 = 1000 litros
1 litro = 1000 cm^3
1 galón = 3.758 litros

FUERZA
1 N = 10^5 dinas
1 kgf = 1 kp = 9.8 N
1 libra = 4.448 N

PRESIÓN
1 atm = $1.013x10^5$ Pa
1 atm = 76 cm Hg
1 bar = 10^5 Pa
1 psi (lb/in^2) = 6895 Pa

ENERGA
1 J = 10^7 ergios
cal = 4.184 J

POTENCIA
1 HP = 746 W
1 CV = 736 W

MEDIDAS ANGULARES
1 rev = 360° = 2π rad
π rad = 180°

1 rad = 57.3°

TEMPERATURA

$$\frac{°C}{100} = \frac{°F - 32}{180} = \frac{°K - 273}{100}$$

Ejercicios resueltos

1) Transformar 0.00569 mi → in

$$0.00569\ mi \cdot \left|\frac{1609\ m}{1\ mi}\right| \cdot \left|\frac{39.37\ in}{1\ m}\right| = 360.44\ in$$

2) Transformar 800 litros → ft^3

$$800\ l \cdot \left|\frac{1000\ cm^3}{1\ l}\right| \cdot \left|\frac{1m^3}{100^3 cm^3}\right| \cdot \left|\frac{3.281^3 ft^3}{1m^3}\right| = 28.26\ ft^3$$

OJO
Cuando una unidad esta elevada a un exponente, se deben elevar al mismo exponente tanto el valor numérico como la unidad.

3) Transformar 50 slug $\frac{ft}{min^2}$ → kg $\frac{m}{s^2}$

$$525\ slug\ \frac{ft}{min^2} \cdot \left|\frac{14.59\ kg}{1 slug}\right| \cdot \left|\frac{1m}{3.281 ft}\right| \cdot \left|\frac{1 min^2}{60^2 s^2}\right| = 0.65\ kg\ \frac{m}{s^2}$$

$kg\ \frac{m}{s^2} = Newton$

4) Transformar $250\ RPM \rightarrow \frac{rad}{s}$

$$250\frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \cdot \left|\frac{2\pi\ rad}{1\ \cancel{rev}}\right| \cdot \left|\frac{1\ \cancel{min}}{60\ s}\right| = 26.17\ \frac{rad}{s}$$

5) Transformar 98 °F $\rightarrow$ $°C$

$$\frac{°C}{100} = \frac{°F - 32}{180}$$

$$\frac{°C}{100} = \frac{98 - 32}{180}$$

$$°C = \frac{66}{1.80} = 36.66\ °C$$

OJO
Para transformar unidades de temperatura se debe resolver la ecuación fraccionaria correspondiente.

TAREA Nº 1: Convertir las siguientes unidades de medida

1) 34 °F → °K
2) 8500 Watts → HP
3) 120 Km/min → m/s
4) 9,8 m/s^2 → ft/s^2
5) 6 in^3/h → litros/s
6) 0.56 atm → Pa
7) 7,8 g/cm^3 → lb/pie ^{3}
8) 8050 kp/mm^2 → psi
9) 4184 J/(kg °K) → cal/(g °C)
10) 240 °C → °F
11) Cuánto volumen de aire contiene una pelota de Basquet de 9,44 pulgadas de diámetro. Exprese el resultado en litros.
12) Hallar en metros la distancia que existe desde la tierra a una estrella, siendo esta distancia equivalente a 2 años luz. (1 año luz = distancia que recorre la luz en un año de 365 días). Considere que la luz recorre 300 000 km/segundo.

Análisis dimensional

Estudia la forma como se relacionan las magnitudes derivadas con las fundamentales.

Toda unidad física, está asociada con una dimensión física. Así, el metro es una medida de la dimensión "longitud" (L), el kilogramo lo es de la "masa" (M), el segundo pertenece a la dimensión del "tiempo" (T).

Sin embargo, como se axplico anteriormente existen otras magnitudes que pueden expresarse como la combinación de las antes mencionadas, como por ejemplo: la velocidad (m/s) cuya dimensión es (LT^{-1}), etc

El análisis dimensional se diría entonces: es un proceso matemático que permite verificar si una fórmula física es o no dimensionalmente correcta o a su vez permite averiguar qué dimensión tiene una u otra magnitud dentro de una ecuación.

Ecuaciones dimensionales

Son expresiones matemáticas que colocan a las magnitudes derivadas en función de las fundamentales; utilizando para ello las reglas básicas del algebra, menos las de suma y resta. Estas ecuaciones se diferencian de las algebraicas porque sólo operan con magnitudes.

Principio de homogeneidad

Si una expresión es correcta en una fórmula, se debe cumplir que todos sus miembros deben ser dimensionalmente homogéneos. Así:

Si E – A + B + C = D

entonces [E] = [A] = [B] = [C] = [D]

que se lee Dimensión de E es igual a dimensión de A …

Nota: Los números, los ángulos, los logaritmos y las funciones trigonométricas, no tienen dimensiones, pero para los efectos del cálculo se asume que es la unidad.

Ejercicios resueltos

1) Halle la dimensión de "F" en la siguiente fórmula física:	$K = \frac{m\,v^2}{F}$ Donde: K: longitud m: masa v: velocidad
Solución: Despejamos F dimensionalmente	$[F] = \frac{[m]\,[v]^2}{[K]}$
Consultamos la tabla de magnitudes y reemplazamos sus dimensiones	$[F] = \frac{M\,(L\,T^{-1})^2}{L}$
Realizamos las operaciones matemáticas	$[F] = \frac{M\,L^2T^{-2}}{L}$
Simplificamos la respuesta	$[F] = MLT^{-2}$ Es decir F es Fuerza

2) Si la expresión es dimensionalmente homogénea; encontrar **x – 3y**	$P = Q^z R^{-y} S^x$ Donde P : presión Q : fuerza R : volumen S : longitud
Solución: Procedemos a realizar el análisis dimensional de cada magnitud	$[P] = [Q]^z [R]^{-y} [S]^x$
Consultamos la tabla de magnitudes y reemplazamos sus dimensiones	$ML^{-1}T^{-2} = (MLT^{-2})^z (L^3)^{-y} (L)^x$
Aplicamos las propiedades de la potenciación y ordemamos la ecuación	$ML^{-1}T^{-2} = M^z L^z T^{-2z} L^{-3y} L^x$ $ML^{-1}T^{-2} = M^z L^{x-3y+z} T^{-2z}$
Igualamos los factores idénticos de cada miembro de la igualdad	$M = M^z$ | $z = 1$ $L^{-1} = L^{x-3y+z}$ | $x - 3y + z = -1$ $T^{-2} = T^{-2z}$ | $-2z = -2$
Reemplazamos el valor de Z en la segunda ecuación	$x - 3y + 1 = -1$ $x - 3y = -1 - 1$ $\boldsymbol{x - 3y = -2}$

3) Halle la dimensión de "A", "B" y "C" en la siguiente fórmula física.	$E = A \cdot F + B \cdot V^2 + C \cdot a$ Donde E : trabajo F : fuerza V : velocidad a : aceleración		
Solución: Aplicamos el principio de homogeneidad	$[E] = [A][F]$	$[E] = [B][V]^2$	$[E] = [C][a]$
Despejamos las dimensiones de [A], [B] y [C]	$[A] = \frac{[E]}{[F]}$	$[B] = \frac{[E]}{[V]^2}$	$[C] = \frac{[E]}{[a]}$
Reemplazamos las dimensiones de cada magnitud	$[A] = \frac{ML^2T^{-2}}{MLT^{-2}}$	$[B] = \frac{ML^2T^{-2}}{(LT^{-1})^2}$	$[C] = \frac{ML^2T^{-2}}{LT^{-2}}$
Aplicamos las propiedades de la potenciación	$[A] = L$	$[B] = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T^{-2}}$ $[B] = M$	$[C] = ML$

TAREA Nº 2: Realice el análisis dimensional en las siguientes fórmulas

1) Halle la dimensión de "H" en la siguiente fórmula física:

$$H = \frac{D \cdot V \cdot A}{F}$$

Donde:
D : densidad
A : aceleración
V : volumen
F : fuerza

Rpta. [H]=1

2) Halle la dimensión de "α" y "β" en la siguiente fórmula física.

$$E = \frac{V^2}{\alpha} + \frac{F}{\beta}$$

Donde:
E : trabajo
v : velocidad
F : fuerza

Rpta. [α] = M^{-1}
[β] = L^{-1}

3) Suponga que la velocidad de cierto móvil, que se desplaza con movimiento bidimensional, puede determinarse con la fórmula empírica:

$$V = a \cdot t^3 + \frac{b}{t^2 - c}$$

Donde: t, es tiempo; a, b, c, son constantes dimensionales. Determine las dimensiones de a, b, y c, para que la fórmula sea homogénea dimensionalmente.

Rpta. [a] = LT^{-4}
[b] = LT
[c] = T^2

4) Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea.

$$a = Vt^x(1 + k^{y-x})$$

Hallar: "x – 2y"

Siendo
a: aceleración
v: velocidad
t : tiempo
Rpta. 1

5) Determinar la dimensión de "x", si la ecuación es dimensionalmente correcta.

$$xv^2 = \frac{WMa}{sen\ 30°} + bt^2$$

Donde:
v : velocidad
a: aceleración
M: masa
W: trabajo
Rpta: M^2LT^{-2}

6) Hallar la dimensión de x y z, si la ecuación mostrada, es dimensionalmente correcta:

$$\pi\ tan\alpha = \frac{(W + Wlog2) + z\sqrt{3}}{(g + gsen\varphi)x}$$

Donde:
W: peso
g: aceleración

Rpta: [x] = M
[b] = MLT^{-2}

7) Si la siguiente expresión es dimensionalmente homogénea, determinar la dimensión de "C".

$$C = \frac{3Ry^2N^x}{(N^x - 2)^2}$$

Donde:
R : longitud
y: aceleración

Rpta: $L^3\ T^{-4}$

8) Halle la dimensión de A y B en la siguiente fórmula:

$$V = \frac{x^2}{A} + \frac{g}{B}$$

Donde:
v : velocidad
x : distancia
g : aceleración

Rpta: [A] = LT
[B] = T^{-1}

UNIDAD II VECTORES

Vectores en el plano

En física, de manera general, se emplean dos tipos de magnitudes: la escalar y la vectorial.

Magnitud escalar

Es la que se define por su valor numérico acompañado de un sistema de unidades seleccionado.

Ejemplos:

Longitud: 10 metros Rapidez: 60 Km/h

Masa: 72 kg Tiempo: 8 seg

Magnitud vectorial

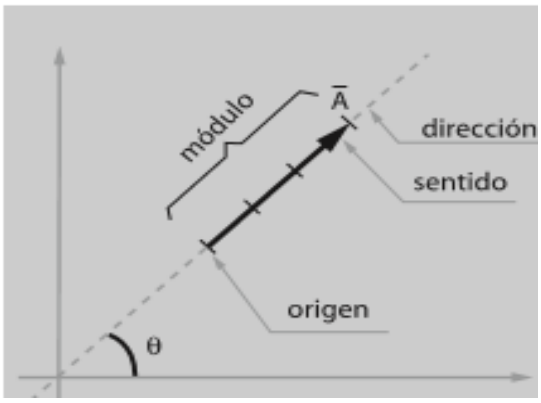
Es aquella que se define en función de su módulo, dirección y sentido. En un sistema de unidades determinado.

Ejemplos:
Desplazamiento: (10 m al norte) Fuerza: (77 Kgf ; 125°)

Velocidad: (60 km/h; S70°O) Aceleración: (-4i + 3j) m/s^2
Gráficamente las magnitudes vectoriales se representan con segmentos orientados llamados vectores.

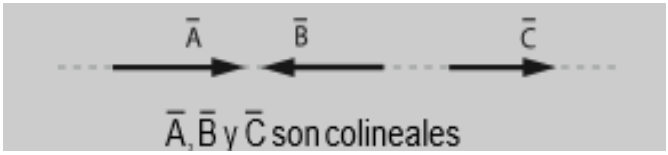
En el gráfico de pueden distinguir los siguientes elementos:

$\vec{A}$; *que se lee*: *vector A*
$|\vec{A}|$; *que se lee*: *módulo del vector A*
θ; *que se lee*: *dirección del vector A*

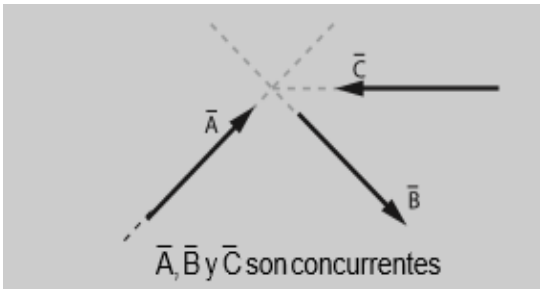


Algunos tipos de vectores

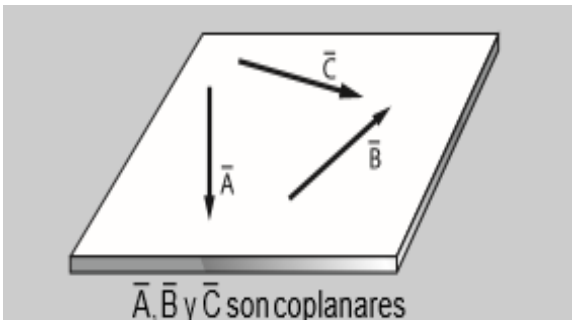
a) Vectores colineales: Son aquellos vectores que están contenidos en una misma línea de acción.



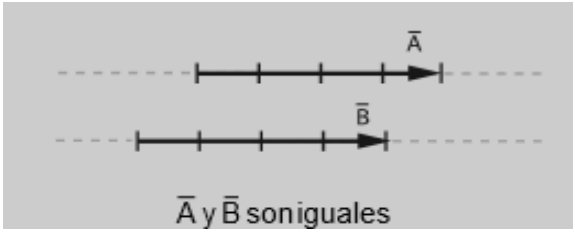
b) Vectores concurrentes: Son aquellos vectores cuyas líneas de acción, se cortan en un solo punto.



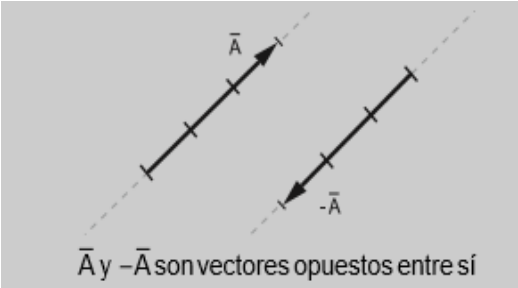
c) Vectores coplanares: Son aquellos vectores que están contenidos en un mismo plano.



d) Vectores iguales: Son aquellos vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido.



e) Vector opuesto (−A): Se llama vector opuesto (−A) de un vector A cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario.

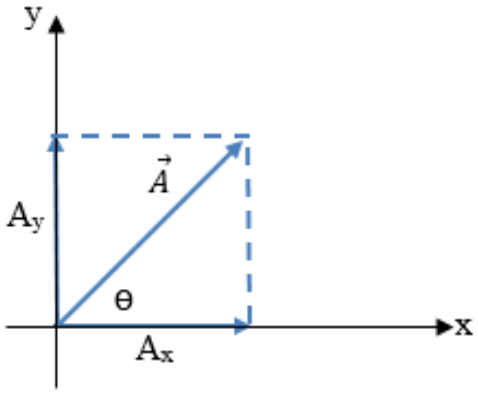


Un vector en el plano puede ser expresado de varias formas que son:

Coordenadas rectangulares

Un vector esta expresado en corrdenadas rectangulares cuando contiene sus componentes rectangulares en forma de par ordenado; de la siguiente manera.

$$\vec{A} = (A_x\,;\,A_y)$$



Módulo del vector

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

Dirección del vector

$$tan\,\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

OJO: La dirección del vector es un ángulo positivo[1] que se mide desde el eje positivo de las x.

Coordenadas polares

Un vector esta expresado en coordenadas polares cuando se define en fución de su módulo y dirección; de la siguiente manera:

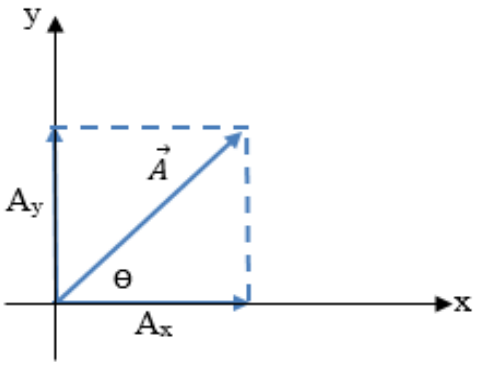
[1] Los ángulos positivos se grafican en sentido antihorario y los ángulos negativos en sentido horario.

$\vec{A} = (|\vec{A}| ; \theta)$

Componentes del vector

$A_x = |\vec{A}| \cos\theta$

$A_y = |\vec{A}| \operatorname{sen}\theta$

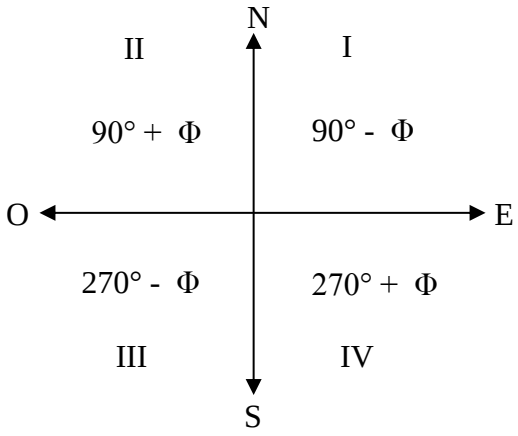


Coordenadas geográficas

Un vector esta expresado en coordenadas geográficas cuando se define en función de su módulo y rumbo[2] del vector; de la siguiente manera:

$\vec{A} = (|\vec{A}| ; rumbo)$

Para transformar un vector de coordenadas geográficas a coordenadas polares, debemos tomar en cuenta en que cuadrante esta ubicado el vector.



Vector en función de sus vectores base

Un vector se expresa en función de sus vectores base cuado a las componentes rectangulares se le añaden los vectores unitario $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$; de la siguiente manera:

$\vec{A} = (A_x \vec{\imath} + A_y \vec{\jmath})$

Vector en función de su módulo por unitario

$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \overrightarrow{U_A}$

Vector Unitario[3]

$\overrightarrow{U_A} = \dfrac{A_x \vec{\imath} + A_y \vec{\jmath}}{|\vec{A}|}$

Vector Unitario

$\overrightarrow{U_A} = \cos\alpha \vec{\imath} + \cos\beta \vec{\jmath}$

[2] El rumbo del vector se orienta por los puntos cardinales

[3] El vector unitario define la dirección y sentido de un vector, su módulo es igual a la unidad y es adimensional.

Como se puede apreciar el vector unitario se puede obtener a través de dos modelos matemáticos, el primero dividiendo el vector por su módulo y el segundo utilizando los ángulos directores.

Ángulos directores: Son aquellos que se forman entre el vector y los ejes positivos del sistema de coordenadas rectangulares, los ángulos directores varían entre 0° y 180° y no existe convención para el giro.

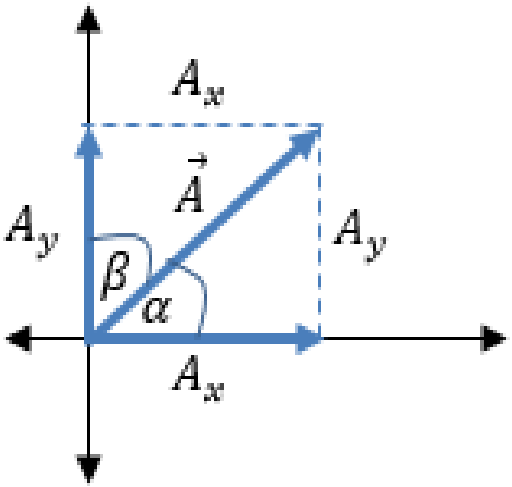
Cosenos directores: Dado que los ángulos directores se encuentran dentro de dos triángulos rectángulos, estos se pueden calcular utilizando la función trigonométrica coseno; de la siguiente manera:

$$cos\ \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$$

$$cos\ \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$$

Luego se puede concluir que:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta = 1$$



Ejercicios resueltos

1) Dado el vector $\vec{M} = (-4\,;3\,)Kgf$ determinar:
   a. El módulo del vector
   b. La dirección del vector
   c. El vector en función de sus vectores base
   d. El vector unitario
   e. Los ángulos directores

Solución

Como se puede observar el vector esta expresado en coordenadas rectangulares y cae en el segundo cuadrante.

a) Calculamos el módulo

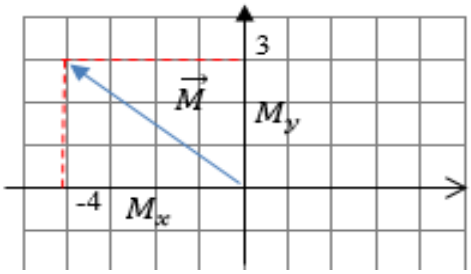
$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{16 + 9}$$

$$|\vec{A}| = 5\ kgf$$

Grafica del vector



b) Calculamos la dirección del vector

$$tan\ \theta = \frac{M_y}{M_x}$$

$$\theta' = -36.86°$$

$$\theta = 180° - 36.86°$$

$$\theta = 143.13°$$

$\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{-4}\right)$

a) El vector en vectores base

$\vec{M} = (-4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})Kgf$

d) Vector Unitario

$\overrightarrow{U_A} = \frac{A_x\,\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}}{|\vec{A}|}$

$\overrightarrow{U_A} = \frac{-4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}}{5}$

$\overrightarrow{U_A} = -0.800\vec{\imath} + 0.600\vec{\jmath}$

b) Ángulos directores

$cos\,\alpha = \frac{M_x}{|\vec{M}|}$ $\quad cos\,\beta = \frac{M_y}{|\vec{M}|}$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right)$ $\quad \beta = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$\alpha = 143.13°$ $\quad \beta = 53.13°$

2) Dado el vector $\vec{P} = (400Kgf\,;S\ 28°\ O\,)$ determinar:

a. Las coordenadas polares
b. Las coordenadas rectangulares
c. El vector en función de sus vectores base
d. El vector unitario
e. El vector en función de su módulo por unitario
f. Los ángulos directores

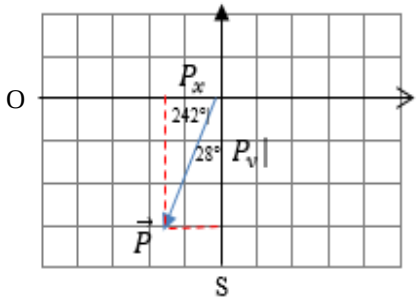
Solución

Como se puede observar el vector esta expresado en coordenadas geográficas y cae en el tercer cuadrante.

a) Coordenadas polares

$\theta = 270° - 28°$
$\theta = 242°$
$\vec{P} = (400Kgf\,;242°\,)$

Grafica del vector



b) Calculamos las componentes del vector

$P_x = |P|\cos\theta$
$P_x = (400)(cos242°)$
$P_x = -187.79\ kgf$

$P_y = |P|sen\,\theta$
$P_y = (400)(sen242°)$
$P_y = -353.18\ kgf$
$\vec{P} = (-187.79\vec{\imath} - 353.18\vec{\jmath})Kgf$

c) El vector en vectores base

$\vec{P} = (-4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})Kgf$

d) Vector Unitario

$\overrightarrow{U_P} = \frac{P_x\,\vec{\imath} + P_y\vec{\jmath}}{|\vec{P}|}$

$\overrightarrow{U_P} = \frac{-187.79\vec{\imath} - 353.18\vec{\jmath}}{400}$

$\overrightarrow{U_P} = -0.469\vec{\imath} - 0.883\vec{\jmath}$

c) Múdulo por Unitario

$\vec{P} = 400Kgf(-0.469\vec{\imath} - 0.883\vec{j})$

d) Ángulos directores

$\alpha = cos^{-1}(-0.469)$
$\alpha = 118°$

$\beta = cos^{-1}(-0.883)$
$\beta = 152°$

TAREA Nº 3: Resuelva los siguientes ejercicios

1) Expresar el vector $\vec{K} = (20\ lbf\ ; N\ 47°\ O)$ en:
   a) Coordenadas polares
   b) Coordenadas rectangulares
   c) Función de su módulo por unitario
   d) Función de los vectores base

2) Expresar el vector $\vec{L} = 147\ cm\ (m\vec{\imath} - n\vec{\jmath})$; si $m = 3n$, en:
   a) Coordenadas geográficas
   b) Coordenadas polares
   c) Coordenadas rectangulares
   d) Función de los vectores base

3) Dado el vector $\vec{H} = (-29\vec{\imath} + 35\vec{\jmath})$, determinar:
   a) El módulo del vector
   b) La dirección del vector
   c) El vector unitario
   d) Los ángulos directores

4) Dado el vector $\vec{D} = (65\ Km/h\ ; 121°)$, determinar:
   a) Las componentes del vector
   b) Las coordenadas rectangulares
   c) El vector unitario
   d) Los ángulos directores

5) La componente de un vector $\vec{B}$ en el eje x es -27 cm, si sus ángulos directores son $\alpha = 145°\ y\ \beta = 125°$, determinar:
   a) La componente y del vector
   b) El módulo del vector
   c) La dirección del vector
   d) El vector en función de su módulo por unitario

Operaciones con vectores

Suma o adición de vectores

Para sumar dos o más vectores, estos deben ser expresados en función de sus vectores base y posteriormente sumar sus correspondientes componentes rectangulares, es decir los valores de "x" con los valores de "x" y los valores de "y" con los valores de "y"

La suma de vectores se la puede hacer de dos formas, solución analítica y solución grafica.

Solución analítica

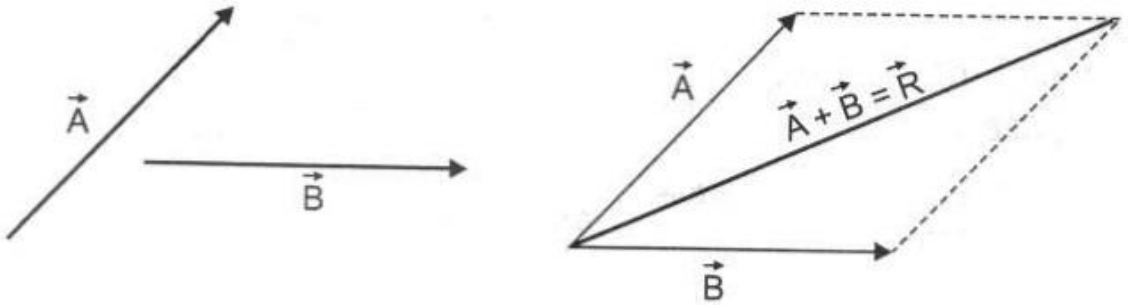
Sean los vectores $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$ y $\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$ entonces el vector resultante $\vec{A} + \vec{B}$, se obtinene sumando algebraicamente las $\vec{\imath}$ con las $\vec{\imath}$ y las $\vec{\jmath}$ con las $\vec{\jmath}$; de la siguiente manera:

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$$
$$\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\vec{\jmath}$$

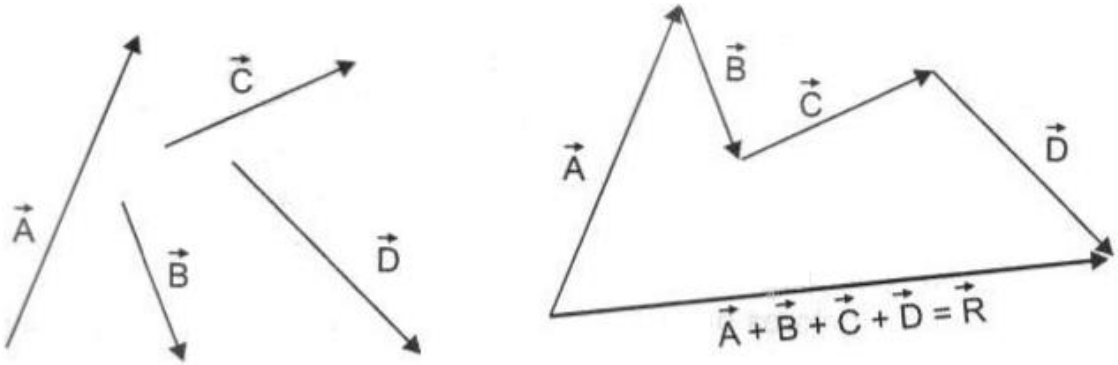
Solución gráfica

La solución gráfica se la puede realizar de dos métodos diferentes, método del paralelogramo o método del polígono.

a) **Método del paralelogramo:** Consiste en ubicar los dos vectores en el plano cartesiano y a continuación, desde el extremo de cada vector trazar rectas paralelas a cada uno de los vectores formando entre sí un paralelogramo, su diagonal representa el vector resultante; de la siguiente manera:



b) **Método del polígono:** Consiste en ubicar un vector a continuación de otro, trazando en el extremo del vector un nuevo plano de referencia, el vector resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último; de la siguiente manera:



Ejercicio resuelto

1) Dado los vectores $\vec{P} = (4.47m\,;N\ 26.57°\ E\ )$ y $\vec{Q} = (6.71m\,;333.43°\,)$ hallar, $\vec{A} + \vec{B}$; analítica y gráficamente.

Solución

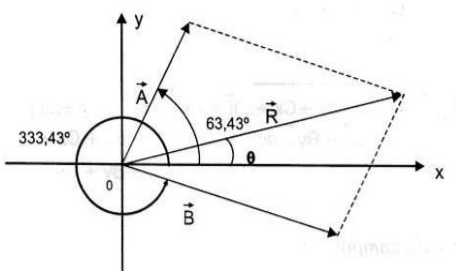
Transformamos los vectores en coordenadas rectangulares y le escribimos en función de sus vectores base

Método Analítico

$$\vec{P} = (2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})m$$
$$\vec{Q} = (6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath})m$$

$$\vec{P} + \vec{Q} = (8\vec{\imath} + \vec{\jmath})m$$

Método Gráfico (Paralelogramo)



Resta o diferencia entre vectores

La diferencia de vectores es un caso particular de la suma de vectores ya que consiste en sumar un vector con el inverso aditivo del otro; es decir:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

En tal sentido el método analítico y gráfico se aplican de idéntica manera que la suma, con la aclaración de que la resta no cumple con la propiedad conmutativa.

Ejercicio resuelto

1) Dado los vectores $\vec{M} = (7Kgf\,;155°\,)$ y $\vec{N} = 5Kgf(-0.600\vec{\imath} - 0.800\vec{\jmath}\,)$ hallar, $\vec{A} + \vec{B}$; analítica y gráficamente.

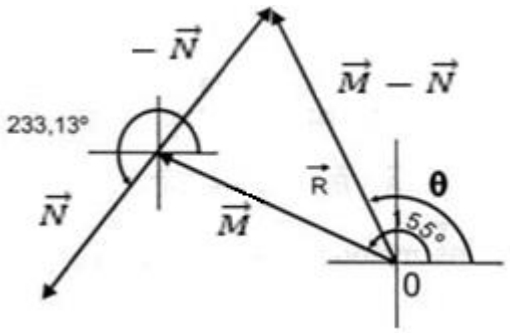
Solución

Transformamos los vectores en coordenadas rectangulares y le escribimos en función de sus vectores base

Método Analítico

$$\vec{M} = (-6.34\vec{\imath} + 2.96\vec{\jmath})Kgf$$
$$-\vec{N} = (3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})m$$
$$\vec{M} - \vec{N} = (-3.34\vec{\imath} + 6.96\vec{\jmath})m$$

Método Gráfico (Polígono)



Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar k por un vector $\vec{A}$, es otro vector cuyo módulo es k veces la longitud del vector $\vec{A}$.

El producto de un escalar k por un vector $\vec{A}$ se obtiene multiplicando k por cada una de las componentes del vector; de la siguiente manera:

$$k\vec{A} = k\left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}\right)$$
$$k\vec{A} = kA_x\vec{\imath} + kA_y\vec{\jmath}$$

Ejercicio resuelto

1) Dado el vector $\vec{P} = (18Kgf\ ; 150°)$ y hallar, $\frac{2}{3}\vec{P}$

Solución

Transformamos el vector en coordenadas rectangulares y le escribimos en función de sus vectores base

Método Analítico

$$\vec{P} = (-15.59\vec{\imath} + 9.00\vec{\jmath})Kgf$$

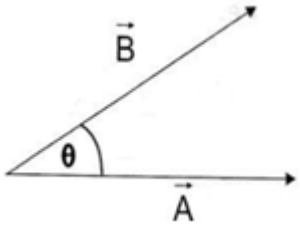
$$\frac{2}{3}\vec{P} = \frac{2}{3}(-15.59\vec{\imath} + 9.00\vec{\jmath})Kgf$$
$$\frac{2}{3}\vec{P} = (-10.39\vec{\imath} + 6.00\vec{\jmath})Kgf$$

Producto escalar o producto punto

El producto escalar entre dos vectores, es un escalar que resulta del producto de los módulos de los vectores dados, por el coseno del menor ángulo que forman entre si.

Fórmula de producto punto

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta$



Para hallar el producto punto entre dos vectores expresados en función de sus vectores base, se procede de la siguiente manera:

$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$
$\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$

Tomando como referencia la fórmula del producto escalar se puede llegar a la siguiente conclusión:

1) El producto punto de dos vectores paralelos es igual a la unidad: $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = 1 \quad \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 1$

2) El producto punto de dos vectores perpendiculares es igual a cero: $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$

Ejercicio resuelto

1) Dado los vectores $\vec{P} = (7Kgf\ ; 155°)$ y $\vec{Q} = (40Kgf\ ; S\ 28°\ O)$ hallar, $\vec{P} \cdot \vec{Q}$

Solución

Transformamos el vector en coordenadas rectangulares y le escribimos en función de sus vectores base y se multiplican las $\vec{\imath}$ con las $\vec{\imath}$ y las $\vec{\jmath}$ con las $\vec{\jmath}$

$\vec{P} = (-6.34\vec{\imath} + 2.96\vec{\jmath})Kgf$
$\vec{Q} = (-18.77\vec{\imath} - 35.32\vec{\jmath})Kgf$

Como se puede observar el resultado del producto punto es un escalar.

$\vec{P} \cdot \vec{Q} = 119 - 154.6$
$\vec{P} \cdot \vec{Q} = -35.6$

Cálculo del ángulo formado entre dos vectores

Una de las aplicaciones de producto punto es determinar el ángulo formado entre dos vectores. Para este caso se procede a despejar el coseno del ángulo de la fórmula de producto escalar; asi:

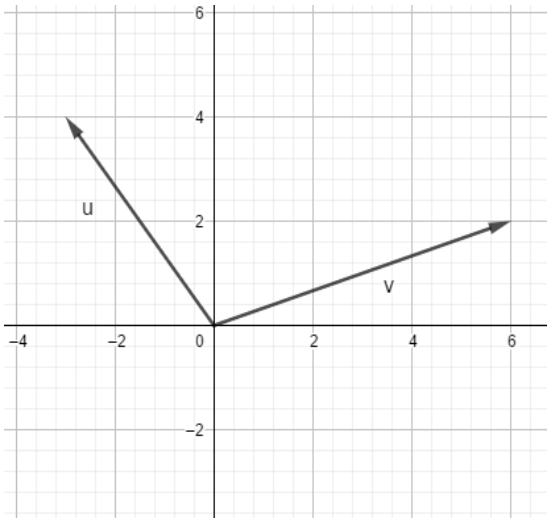
$$cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Ejercicio resuelto

1) Dado los vectores $\vec{U} = (-3\ ; 4)m$ y $\vec{V} = (6\ ; 2\ )m$ hallar el ángulo formado entre los dos vectores; solución analítica y gráfica.

Solución Analítica	**Solución Gráfica**
1) Hallamos el producto punto	Ubicamos los vectores en plano cartesiano
$\vec{U} = (-3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})m$	

$\vec{V} = (\ 6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\ )m$



$\vec{U} \cdot \vec{V} = -18 + 8$

$\vec{U} \cdot \vec{V} = -10$

2) Encontramos sus módulos

$|\vec{U}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$

$|\vec{V}| = \sqrt{(6)^2 + (2)^2} = \sqrt{40}$

3) Encontamos el ángulo

$$cos\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}||\vec{V}|}$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{-10}{5\sqrt{40}}\right)$$

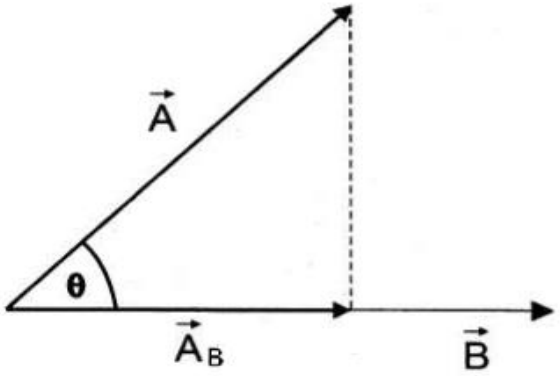
$\theta = 113.28°$

Cálculo del vector proyección

Otra de las aplicaciones del producto punto es el proceso matemático que permite calcular el vector proyección de un vector sobre otro; cuyos modelos matemáticos son los siguientes:

$$\vec{A}_B = |A|\ cos\theta\ \vec{u}_B$$

$$\vec{A}_B = \left(\vec{A} \cdot \vec{u}_B\right)\vec{u}_B$$



Ejercicio resuelto

1) Dado los vectores $\vec{A} = (8\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})Km$ y $\vec{B} = (12\ Km\ ;N\ 15°\ E\ )m$ hallar la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

Solución Analítica

1) Convertimos el vector $\vec{B}$ en coordenadas rectangulares

$\vec{B} = (3.11\vec{\imath} + 11.59\vec{\jmath})Km$

Solución Gráfica

4) Aplicamos la fórmula de vector proyección

$\vec{A}_B = \left(\vec{A} \cdot \vec{u}_B\right)\vec{u}_B$

$\vec{A}_B = (4.004)(0.259\vec{\imath} + 0.966\vec{\jmath})$

2) Encontramos el vector unitario de $\vec{u}_B$

$$\vec{u}_B = \frac{3.11\vec{\imath} + 11.95\vec{\jmath}}{12}$$

$$\vec{u}_B = 0.259\vec{\imath} + 0.966\vec{\jmath}$$

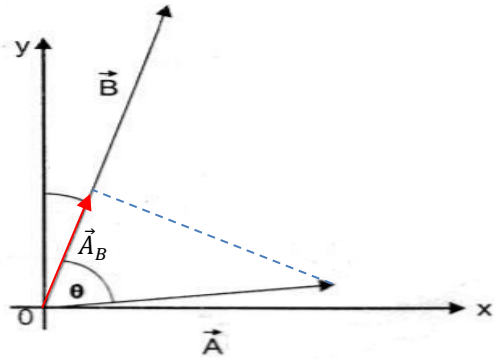
3) Encontamos el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{U}_B$

$$\vec{A} = 8.00\vec{\imath} + 2.00\vec{\jmath}$$
$$\vec{u}_B = 0.259\vec{\imath} + 0.966\vec{\jmath}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{u}_B = 2.072 + 1.932$$
$$\vec{A} \cdot \vec{u}_B = 4.004$$

$$\vec{A}_B = (1.037\vec{\imath} + 3.87\vec{\jmath})Km$$

5) Trazamos la gráfica

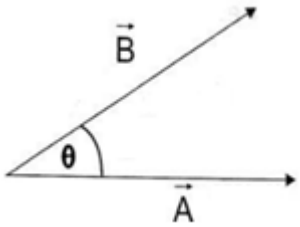


Producto vectorial o producto cruz

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, es otro vector cuyo módulo se obtiene multiplicando los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el seno del menor ángulo formado entre ellos, su dirección es perpendicular al plano formado por dichos vectores y su sentido se determina por la regla del "sacacorchos" o regla de la mano derecha.

Fórmula de producto cruz

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|sen\theta$$



Cuando se analiza el producto cruz es necesario trabajar en tres dimensiones, para ello aumentamos el eje "z", por lo que los vectores unitarios de cada uno de ellos sería $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$; de este modo se pueden establecer las siguientes reglas:

1) El producto vectorial de dos vectores paralelos es igua a cero

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

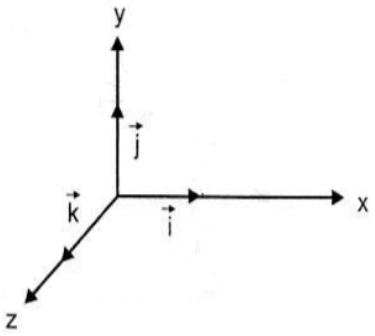
2) Siguiendo el orden de los vectores unitarios $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, el producto vectorial entre dos de ellos equivale al que le sigue en el ciclo; de la siguiente manera:

En sentido antihorario

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$$
$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$$
$$\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

En sentido horario

$\vec{j} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$
$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{\imath}$
$\vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{j}$



3) El producto vectorial de dos vectores en función de sus vectores base se obtiene aplicando determinantes; asi:

Dados los vectores

$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{j}$
$\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{j}$

El producto cruz se obtiene

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_x B_y - B_x A_y\right)\vec{k}$$

Ejercicio resuelto

1) Dado los vectores $\vec{P} = (60\ Km/h\,; S\ 18°\ O)$ y $\vec{Q} = 50\,Km/h\,(-0.458\vec{\imath} + 0.889\vec{j}\,)$ hallar $\boldsymbol{\vec{P} \times \vec{Q}}$

Solución

1) Convertimos los vectores en coordenadas rectangulares

$\vec{P} = (-18.54\vec{\imath} - 57.06\vec{j})Km$

$\vec{Q} = (-22.90\vec{\imath} + 44.45\vec{j})Km$

2) Encontramos el producto vectorial

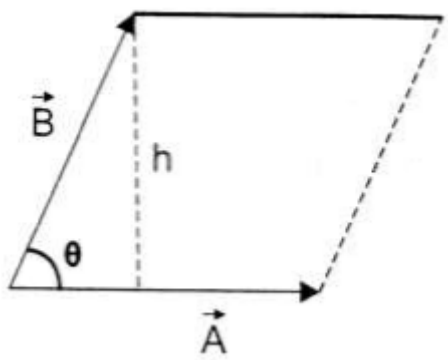
$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} -18.54 & -57.06 \\ -22.90 & +44.45 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$\vec{P} \times \vec{Q} = (-824.10 - 1306.67)\vec{k}$

$\vec{P} \times \vec{Q} = -2130.77\vec{K}$

Cálculo del área de un paralelogramo

Una de las aplicaciones del producto vectorial es hallar el área de un paralelogramo formado por las proyecciones de dos vectores.

	Area = base x altura Area = [A] x h h = [B] senΘ Area = [A] [B] senΘ Area = $\left\vert \vec{A} \times \vec{B} \right\vert$

TAREA Nº 4: Realice los siguientes operaciones entre vectores

1. Dados los vectores $\vec{P} = (12\vec{\imath} - 8\vec{\jmath})m/s$ y $\vec{Q} = (15\,m/s\,; 120°)$, encontrar:
   a) $\vec{P} - \vec{Q}$
   b) $\vec{Q} + \vec{P}$
   c) $(3/2)\vec{P}$
   d) $\vec{Q} \cdot \vec{P}$
   e) El ángulo formado entre $\vec{Q}$ y $\vec{P}$
   f) $\vec{P} \times \vec{Q}$
2. Dados los vectores $\vec{E} = 15N(m\vec{\imath} + 0.48\vec{\jmath})$, $\vec{I} = (21N; SE)$ y $\vec{F} = (12N; 312°)$, hallar:
   a) $\vec{E} + \vec{I} + \vec{F}$
   b) $2/3\,\vec{I} - 3\vec{E} + 5/2\,\vec{F}$
   c) $2/5\,(\vec{F} \cdot \vec{E})$
   d) $3\vec{I} \times 2\vec{F}$
   e) La proyección de $\vec{E}$ sobre el resultado de $(\vec{I} + \vec{F})$
   f) El ángulo comprendido entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{E}$
3. Dados los vectores $\vec{R} = (20\,m\,; N25°O)$, $\vec{S} = (15\vec{\imath} + 9\vec{\jmath})m$, $\vec{T} = (30m\,; 260°)$ y $\vec{U} = 17m(0.5\vec{\imath} - 0.866\vec{\jmath})$, hallar:
   a) $3/4\,\vec{S} - 2\vec{R} + \vec{U}$
   b) $5\vec{U} - 1/2\,\vec{T} + \vec{R} - 2\vec{S}$
   c) $(\vec{R} \cdot \vec{S}) + (\vec{T} \cdot \vec{U})$
   d) $(\vec{T} \times \vec{U}) + (\vec{R} \times \vec{S})$
   e) $(3\vec{R}) \cdot (2\vec{T})$
   f) La proyección de $(\vec{R} + \vec{S})$ sobre $(\vec{T} - \vec{U})$
   g) El área del paralelogramo formado por $(\vec{R} - \vec{T})$ y $(\vec{S} + \vec{U})$
4. Dados los vectores $\vec{A} = 46cm(m\vec{\imath} - 0.23\vec{\jmath})$, $\vec{B} = (81cm\,; 155°)$, $\vec{C} = (57cm\,; N21°E)$ y $\vec{D} = (-32\vec{\imath} - 29\vec{\jmath})cm$, hallar:
   a) $1/2\,\vec{A} + 2\vec{C} - \vec{B}$
   b) $2\vec{D} - 3\vec{A} + 1/3\,\vec{C} - 2/5\,\vec{B}$
   c) $(3\vec{B} + 2/3\,\vec{A}) \cdot (-\vec{C} - 4/3\,\vec{D})$

d) $\left(\vec{D} - 3\vec{C}\right) \times \left(3/2\,\vec{B} + 4\vec{A}\right)$
e) $\left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right) \cdot \left(\vec{C} \cdot \vec{D}\right)$
f) $\left(2\vec{A} \times \vec{C}\right) + \left(5\vec{B} \times \vec{D}\right)$
g) El ángulo formado por $\left(\vec{D} - \vec{A}\right)$ y $\left(\vec{B} + \vec{C}\right)$

UNIDAD III CINEMÁTICA

Noción de cinemática

Todas las cosas del mundo físico están en movimiento, desde las más grandes hasta las más pequeñas. Este fenómeno ha despertado un interés natural en el hombre, desde el inicio, por entenderlo, predecirlo y controlarlo.

Definición

La cinemática estudia y analiza el movimiento de los cuerpos, sin tomar en cuenta las causas que lo producen y lo representa en función de las características del movimiento.

Es decir la cinemática analiza *la distancia*, *la rapidez* y *la aceleración* adquirida por una partícula en un determinado tiempo.

Para el estudio de la cinemática se hace necesario definir los siguientes términos:

Partícula

En el estudio del movimiento, un cuerpo es considerado como una partícula sis sus dimensiones son despreciables en relación con las magnitudes de las distancias analizadas.
Ejemplos

- El planeta tierra en relación a la galaxia

- Una roca en relación con una montaña

Sistema de referencia

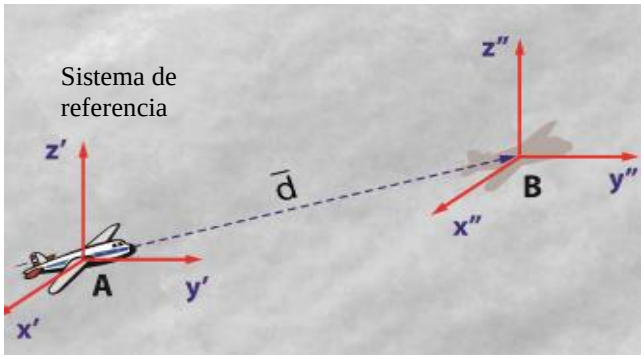
Es un cuerpo o partícula que, junto a un sistema de coordenadas, permite determinar la ubicación de otro cuerpo, en un instante dado.

La descripción del movimiento de una partícula depende del sistema de referencia en el cual se analice, en cuyo caso el sistema de referencia se considera fijo.

De manera general, se hacen los estudios tomando como referencia la tierra, o sea, para un observador **inmóvil** en la superficie terrestre.

Ejemplo

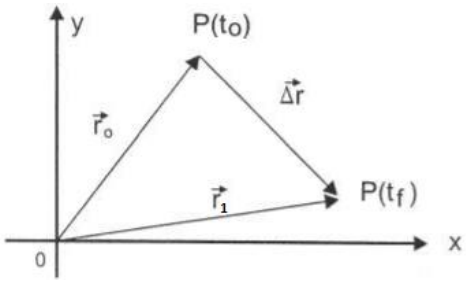
Si un avión A que vuela a una altura determinada y en su vuelo observa otro avión B, entornces el sistema de referencia estrá ubicado en la posición que se encuentre el primer avión en un determinado tiempo.



Vector desplazamiento $(\vec{\Delta}\boldsymbol{r})$

Es la variación que experimenta el vector posición de una partícula, en un cierto intervalo de tiempo $(\vec{\Delta}t)$.

Por lo que se establece la siguiente fórmula:



$$\vec{\Delta}\boldsymbol{r} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}}$$

Donde:
$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{posición\ inicial}$
$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{posición\ final}$
$\vec{\Delta}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{desplazamiento}$

Nota: La distancia recorrida por la partícula es igual al módulo del desplazamiento

$$\boldsymbol{d} = |\vec{\Delta}\boldsymbol{r}|$$

De la ecuación anterior se puede despejar la posición final, asi $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} + \vec{\Delta}\boldsymbol{r}$, representa el objetivo de estudio de la Cinemática, es decir poder determinar cual es la posición final de una partícula en cualquier instante, para lo cual es necesario conocer de donde partió ($\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}}$) y cual es su desplazamiento ($\vec{\Delta}\boldsymbol{r}$).

El desplazamiento lineal, la posición inicial y la posición final se miden en unidades de longitud es decir, en cm, m, ft, in, etc.

Ejercicios resueltos

1) Un insecto se mueve rectilíneamente 80 cm en dirección N 20° E y quiere dirigirse hacia un alimento que se encuentra a 50 cm en dirección SE ubicado desde el mismo punto de referencia, determinar el desplazamiento realizado por la mosca y la distancia recorrida.

Solución

1) Convertimos los vectores posición en coordenadas rectangulares

$\vec{r}_0 = (26.36\vec{\imath} + 75.17\vec{\jmath})cm$

$\vec{r}_1 = (35.35\vec{\imath} - 35.35\vec{\jmath})cm$

3) Utilizamos la fórmula

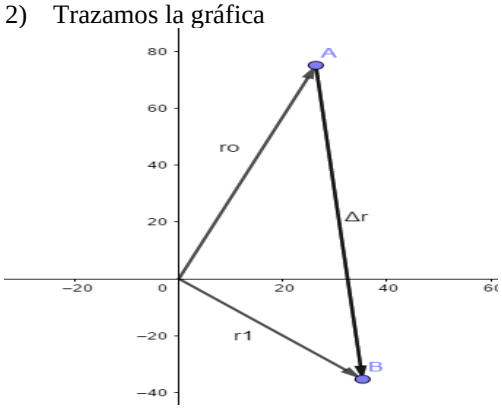
$\vec{\Delta}\boldsymbol{r} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}}$

$\vec{\Delta}r = 35.35\vec{\imath} - 35.35\vec{\jmath} - 26.36\vec{\imath} - 75.17\vec{\jmath}$

$\vec{\Delta}r = (8.99\vec{\imath} - 110.58\vec{\jmath})cm$

4) Hallamos la distancia

2) Trazamos la gráfica



$d = |\Delta r|$

$d = \sqrt{(8.99)^2 + (110.58)^2}$

$d = 110.95\ cm$

---

2) Una avíon de aeromodelismo despega en la dirección N 40° O y luego de recorrer 120 m realiza un giro para impactar en un blanco por lo que recorrre 70m en dirección S 80°O. Determine la posición del blanco.

Solución

a) Convertimos los vectores posición en coordenadas rectangulares

$\vec{r}_0 = (120m\,;N40^oO) \quad \vec{r}_0 = (-77.13\vec{\imath} + 91.93\vec{\jmath})m$

$\vec{\Delta}r = (70m\,;S\ 80°\ O) \quad \vec{\Delta}r_1 = (-68.94\vec{\imath} - 12.15\vec{\jmath})m$

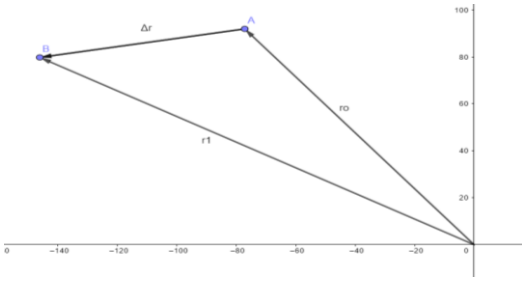
c) Utilizamos la fórmula

$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{\Delta}r$

$\vec{r}_1 = -77.13\vec{\imath} + 91.93\vec{\jmath} - 68.94\vec{\imath} - 12.15\vec{\jmath}$

$\vec{r}_1 = (-146.07\vec{\imath} + 79.78\vec{\jmath})m$

b) Trazamos la gráfica



TAREA Nº 5: Resuelva los siguientes ejercicios

1. Si desde un observatorio instalado en la playa se observa un avión a una distancia de 2.5 Km en dirección SE y un barco a una distancia de 3.8 Km en dirección S 72° O.

    a. ¿Cuál es la posición del avión conrespecto al barco?
    b. ¿Cuál es la distancia que los separa?

2. Un avión de aeromodelismo esta a 4 Km en dirección SO de la torre de control. En ese momento, su dueño desea impactar en un blanco que esta situado en el punto (6 , -4) Km, determinar:

    a. La posición del avión recpecto al blanco
    b. La dirección que debe tomar el avión para lograr su propósito
    c. La distancia del avión al blanco

3. Un aveja vuela en dirección N 28° E una distancia de 3.5 metros, en ese instante realiza un giro y vuela 6.00 metros en dirección S 40° E hasta posarse sobre una flor. Determinar:

    a. La posición de la flor
    b. La distancia de la aveja a la flor

4. Se desea cavar un túnel a través de una montaña, para lo cual el ingeniero a partir de un punto de referencia C localiza los puntos A (entrada del túnel) a 800 metros en dirección N 30° O y B (salida del túnel) a 950 m. en dirección S 70°E. Determinar la longitud del túnel.

5. Para ir de una ciudad a otra, un vehículo recorre por carreteras rectas, primero recorre 42 Km en dirección N 15° E, luego $(46\vec{\imath} + 46\vec{\jmath})Km$ y finalmente (80 Km; 20°). Determinar:

    a. Los desplazamientos realizados
    b. Los vectores posición de cada punto
    c. El desplazamiento total realizado
    d. El módulo del desplazamiento
    e. La distancia recorrida

Entre otros conceptos fundamentales para el inicio del estudio de la cinemática tenemos los siguientes:

Reposo

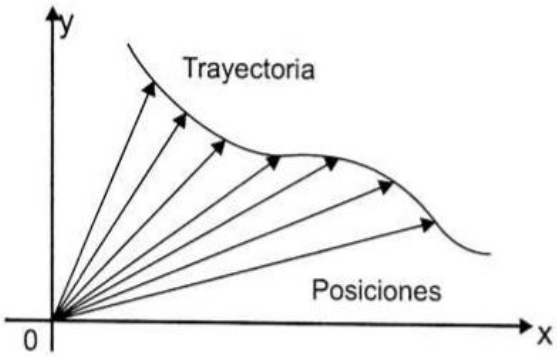
Una partpicula esta en reposo durante un cierto intervalo de tiempo cunado su posición $(\vec{r})$ permanece constante dentro de un mismo sistema de referencia.

Movimiento

Una partícula esta en movimiento durante un cierto intervalo de tiempo, cuando su posición $(\vec{r})$ cambia dentro de un mismo sistema de referencia.

Trayectoria

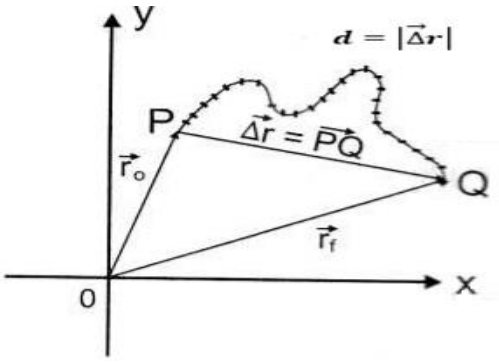
Es la línea que resulta de unir las diferentes posiciones que ecupó una partícula al moverse de un lugar a otro.



Medidas del movimiento

Distancia recorrida

Es la longitud medida sobre la trayectoria recorrida por la partícula al moverse de una posición a otra, como se dijo anteriormente, matemáticamente la distancia es igual al módulo del desplazamiento.



Velocidad $(\vec{v})$

Es la relación que se establece entre el desplazamiento realizado por la partícula y el intervalo de tiempo en que se efectuó el mismo.

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta} r}{\Delta t}$$

Es necesario aclarar que, si el intervalo de tiempo (Δt) es apreciablemente mayor que cero $(\Delta t \gg 0)$, la velocidad se la denomina **velocidad media.**

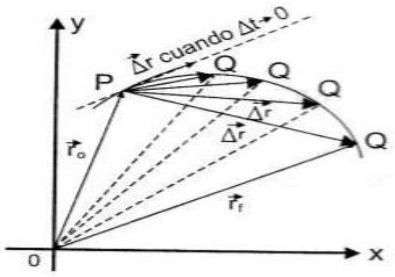
$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta} r}{\Delta t} \qquad si\ \Delta t \gg 0$$

Para el estudio de la Física y de la cinemática en particular lo que interesa es saber qué sucede con la velocidad en cada instante de tiempo, por lo que si el intervalo de tiempo cada vez se aproxima a cero entonces la velocidad se aproxima a un valor límite, de este modo dieremos que la velocidad se denomina **velocidad instanténea.**

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta} r}{\Delta t}$$

Gráficamente la velocidad instantánea se representa de la siguiente manera:

Como se puede ver en el gráfico, al disminuir el valor de Δt, Q se aproxima a P y en el límite cuando $\Delta t \to 0$, Q prácticamente coincide con P. Por lo tanto $\overrightarrow{PQ} = \vec{\Delta} r$, toca en un punto tangencialmente a la trayectoria.



Cuando se hace en análisis del movimiento de una partícula de manera vectorial y escalar, se hace necesario definir la ***repidez*** de un cuerpo.

Repidez

Es la relación que se establece entre la distancia recorrida por la partícula al moverse de un lugar a otro y el intervalo de tiempo en que se desarrollo dicho movimiento.

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{\Delta t}$$

OJO: La rapidez ***instantánea*** es igual al módulo de la velocidad instantánea.

$$\boldsymbol{v} = |\vec{\boldsymbol{v}}|$$

∗ *La rapidez en el S.I. se mide en (m/s)*

Aceleración

Es una magnitud vectorial cuyo módulo mide el cambio de la velocidad por cada unidad de tiempo. Físicamente el módulo de la aceleración mide la rapidez con la cual varía la velocidad. Se representa por "a".

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\Delta} \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

∗ *La aceleración en el S.I. se mide en (m/s^2)*

Si el intervalo de tiempo cada vez se aproxima a cero entonces la aceleración se se denomina aceleración ***instanténea.***

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta} v}{\Delta t}$$

Clasificación del movimiento

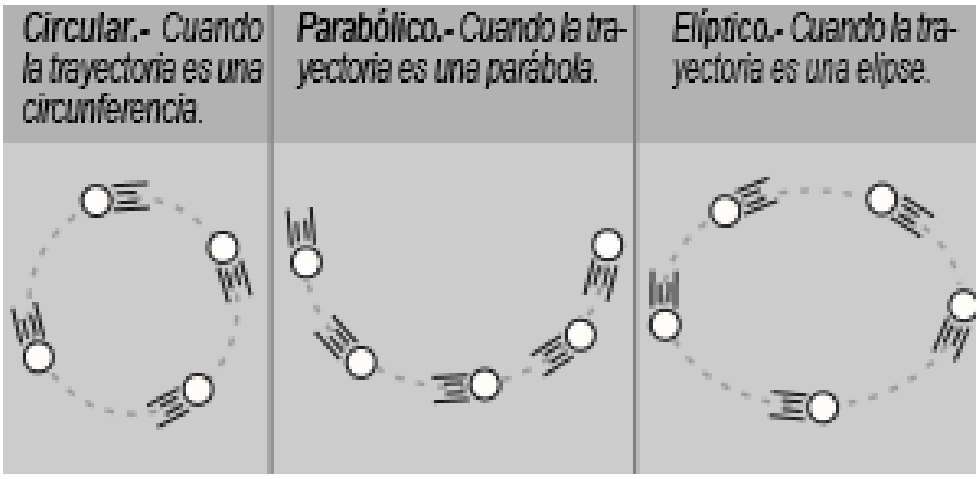
Por su trayectoria

Rectilíneo:

Cuando la trayectoria es una línea recta.

Curvilíneo:

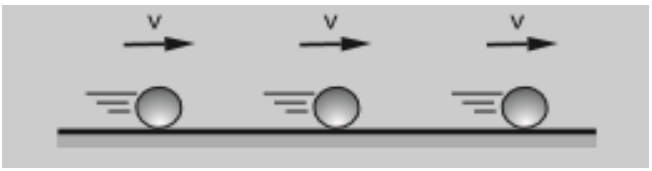
Cuando la trayectoria es una línea curva. Entre los más conocidos tenemos:



Por su rapidez

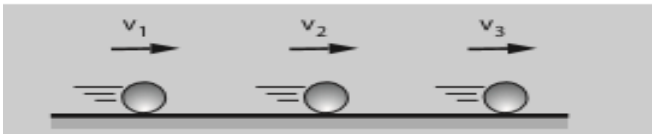
Uniforme:

Cuando el módulo de la velocidad permanece constante.



Variado:

Cuando el módulo de la velocidad varía con respecto al tiempo.



Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

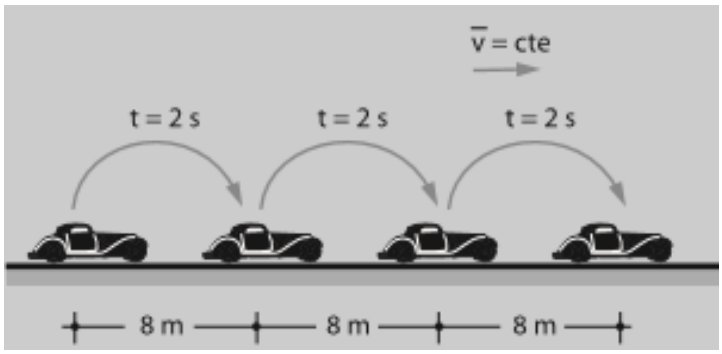
Un cuerpo posee movimiento rectilíneo uniforme cuando cumple las siguientes condiciones:

a) La trayectoria que recorre es una línea recta.

b) La velocidad (v) es constante.

En esta clase de movimiento, el móvil recorre espacios iguales en tiempos iguales.

Ilustración



Ecuación que rige el MRU

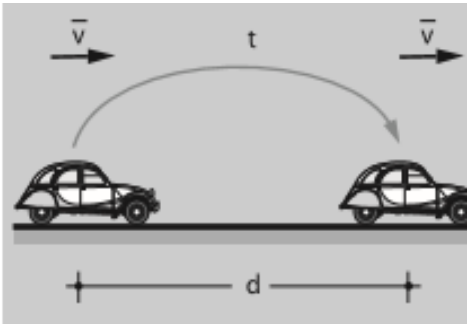
La distancia recorrida por la partpicula es directamente proporcional al tiempo trancurrido en dicho movimiento; es decir:

$$d \; \delta \; t$$

$d = v * t$ (análisis escalar)

$\vec{\Delta}r = \vec{v} * \Delta t$ (análisis vectorial)

$\vec{\Delta}r = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ $\quad$ $\vec{\Delta}t = t_1 - t_0$



Ejercicios resueltos

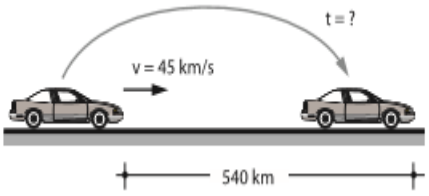
1) Cuantas horas dura un viaje hasta una ciudad sureña ubicado a 540 km, si el bus marcha a razón de 45 km/h?.

Solución

$$d = v * t$$

Despejamos el tiempo

$$t = \frac{d}{v} = \frac{540\ Km}{45\ Km/h} = 12\ h$$



2) Dos autos que inicialmente se encuentran separados 200 m, se mueven en el mismo sentido con velocidades constantes de 40 m/s y 60 m/s. ¿Después de que tiempo uno de ellos alcanza al otro? ver figura.

Solución

Planteamos la ecuación de distancias

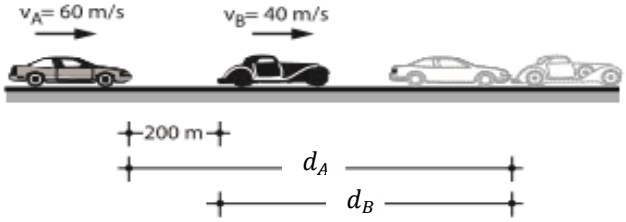
$$d_A - d_B = 200\ m$$

$$v_A * t - v_B * t = 200$$

$$60t - 40t = 200$$

$$20t = 200$$

$$t = \frac{200}{20} = 10\ s$$



$$d_A = v_A * t_A$$

$$d_B = v_B * t_B$$

pero $t_A = t_B = t$

3) Una partícula se desplaza 75,8 Km en dirección N 36.42° O, con velocidad constante durante 48 min. Determinar:

a) La velocidad en Km/h
b) La rapidez en m/s
c) La distancia recorrida

Datos

$\vec{\Delta}r = (75.8Km; N36.42°O)$

$\vec{\Delta}r = (-45\vec{\imath} + 61\vec{\jmath})Km$

$\Delta t = 48\ \text{min} = 0.8\ h$

a)

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta}r}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{(-45\vec{\imath} + 61\vec{\jmath})Km}{0.8\ h}$$

$$\vec{v} = (-56.25\vec{\imath} + 76.25\vec{\jmath})Km/h$$

b) $v = |\vec{v}|$

$$v = \sqrt{(-56.25)^2 + (76.25)^2}$$

$$v = 94.753\ \frac{Km}{h} \times \frac{1000m}{1\ Km} \times \frac{1\ h}{3600\ s}$$

$$v = 26.32\ m/s$$

c) $d = |\vec{\Delta}r|$

$$d = \sqrt{(-45)^2 + (61)^2}Km$$

$$d = 75.8\ Km$$

4) Una partícula que se mueve con velocidad constante de $(65\vec{\imath} + 52\vec{\jmath})\ Km/h$ llega al punto $(35\ ;\ 17)Km$ en 3 horas. Determinar:

a) La posición que tenía la partícula en t = 1 hora
b) La distancia recorrida en el intervalo anterior
c) La rapidez de la partícula

Datos

$\vec{r}_1 = (35\vec{\imath} + 17\vec{\jmath})Km$
$t_1 = 3h \quad t_0 = 1h$
$\vec{v} = (65\vec{\imath} + 52\vec{\jmath})\ Km/h$

a) $\Delta t = t_1 - t_0$
$\Delta t = (3 - 1)h$
$\Delta t = 2h$
$\vec{\Delta r} = \vec{v} * \Delta t$
$\vec{\Delta r} = (65\vec{\imath} + 52\vec{\jmath})(2)$
$\vec{\Delta r} = (130\vec{\imath} + 104\vec{\jmath})Km$
Despejamos
$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 - \vec{\Delta r}$
$\vec{r}_0 = (35\vec{\imath} + 17\vec{\jmath}) - (130\vec{\imath} + 104\vec{\jmath})$
$\vec{r}_0 = (35\vec{\imath} + 17\vec{\jmath} - 130\vec{\imath} - 104\vec{\jmath})Km$
$\vec{r}_0 = (-95\vec{\imath} - 87\vec{\jmath})Km$

b) $d = |\vec{\Delta r}|$
$d = \sqrt{(130)^2 + (104)^2}$
$d = 166.48\ Km$

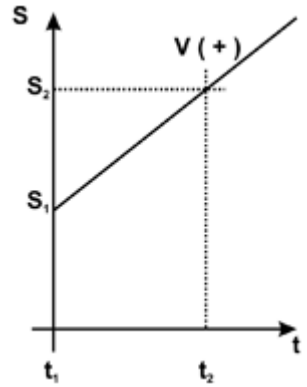
d) $v = |\vec{v}|$

$v = \sqrt{(65)^2 + (52)^2} Km/h$

$v = 83.24\ Km/h$

Gráficas de MRU

Posición vs tiempo



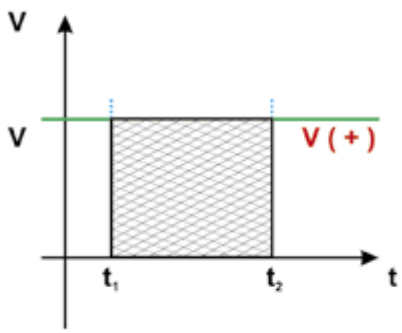
Velocidad vs tiempo

De la gráfica posición vs tiempo se puede determinar la velocidad de la partícula, calculando la pendiente de la recta; así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$v = m$$

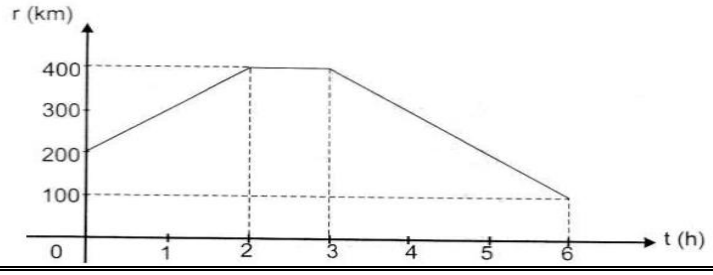
$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$



Del gráfico de la velocidad en función del tiempo es posible hallar el espacio recorrido por el móvil, pues es numéricamente igual al área bajo la curva entre los límites del tiempo en el quiere determinarse la posición.

$d = Area\ del\ rectángulo$
$d = base\ \times altura$
$d = (t_2 - t_1) \times v$

Ejercicio resuelto



1) Una partícula que se mueve en función de la siguiente gráfica. Determinar:

a) La posición inicial
b) La rapidez en el viaje de ida
c) Cuánto tiempo permaneció en reposo
d) La posición final

Solución

a) Viendo la gráfica se puede observar que la partícula parte de la posición inicial $\vec{r}_0 = 200\ Km$

b) El viaje de ida es de 0 a 2 horas

$$v = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{400 - 200}{2 - 0}$$

$$v = 100\ Km/h$$

c) El cuerpo está en reposo de 2 a 3h

$$v = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{400 - 400}{3 - 2}$$

$$v = 0\ Km/h$$

d) El regreso se da de 3 a 6 horas

e) Viendo la gráfica se puede observar que la partícula llega a la posición final de $\vec{r}_1 = 100\ Km$, del origen.

$$v = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{100 - 400}{6 - 3}$$

$$v = -100\ Km/h$$

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Un cuerpo posee movimiento rectilíneo uniformemente variado cuando cumple las siguientes condiciones:

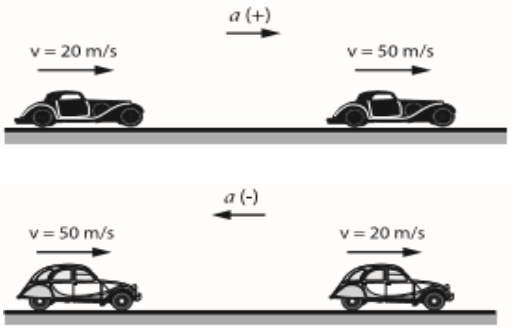
a) La trayectoria que recorre es una línea recta.

b) La velocidad cambia, permaneciendo constante el valor de la aceleración.

En este movimiento, la partícula efectúa variaciones de velocidad iguales en tiempos iguales.

Si la velocidad de la partícula aumenta el movimiento es ***acelerado.***

Si la velocidad de la partícula disminuye el movimiento es ***desacelerado.***



Fórmulas del MRUV

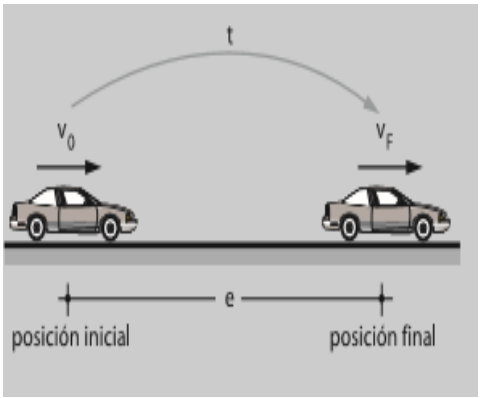
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t}$$

$$d = \frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2a}$$

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Donde

d = distancia (m)
v_0 = velocidad inicial (m/s)
v_1 = velocidad final (m/s)
t = tiempo (s)
a = aceleración (m/s^2)



a (+); si el movimiento es acelerado.
a (-); si el movimiento es retardado

Ejercicios resueltos

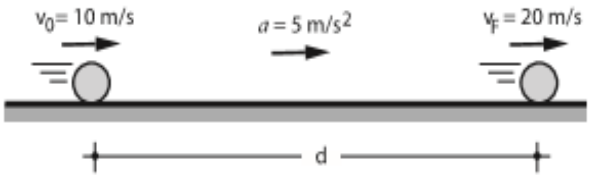
1) Un móvil aumenta su velocidad de 10 m/s a 20 m/s acelerando uniformemente a razón de 5 m/s^2. ¿Qué distancia recorrió en dicho movimiento? y ¿qué tiempo tarda?.

Solución

$$d = \frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2a}$$

$$d = \frac{[(20)^2 - (10)^2]\, m^2/s^2}{2(5\, m/s^2)}$$

$$d = 30\ m$$



$$t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

$$t = \frac{20\, m/s - 10 m/s}{5\ m/s^2}$$

$$t = 2\ s$$

2) Una partícula recorre 30 m en 5 s con MRUV si al partir tenía una velocidad de 4 m/s. ¿Qué velocidad tuvo al término del recorrido?

Solución

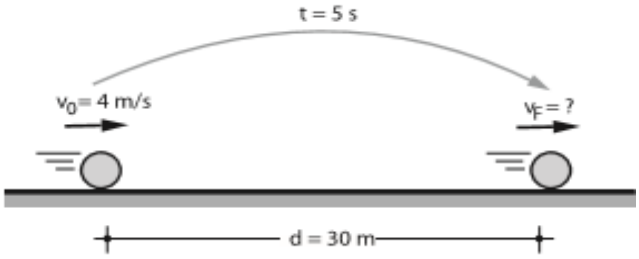
$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$a = \frac{2d - 2v_0 t}{t^2}$$

$$a = \frac{2(30) - 2(4)(5)}{(5)^2}$$

$$a = \frac{(60 - 40)m}{25 s^2}$$

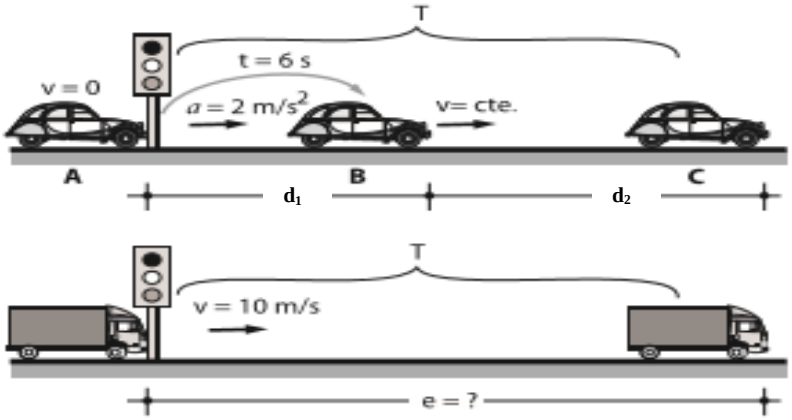
$$a = 0.8\ m/s^2$$



$$v_1 = v_0 + at$$
$$v_1 = 4\, m/s + (0.8\, m/s^2)\,(5s)$$
$$v_1 = 4\, m/s + 4\, m/s$$
$$v_1 = 8\, m/s$$

3) Un automóvil está esperando en reposo que la luz del semáforo cambie. En el instante que la luz cambia a verde, el automóvil aumenta su velocidad uniformemente con una aceleración de 2 m/s^2 durante 6 segundos, después de los cuales se mueve con velocidad uniforme. En el instante que el automóvil empezó a moverse después del cambio de luz, un camión lo sobrepasa en la misma dirección, con el movimiento uniforme a razón de 10 m/s. ¿Cuánto tiempo y cuán lejos del semáforo el automóvil y el camión volverán a estar juntos?

Solución



D = ??

En el tramo AB el automóvil se mueve con MRUV, por lo tanto:

$$d_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a {t_1}^2$$

pero $v_0 = 0$

$$d_1 = \frac{1}{2} a {t_1}^2$$

$$d_1 = \frac{1}{2}(2\,m/s^2)(6s)^2$$

$$d_1 = 36\,m$$

La velocidad final del tramo AB es la velocidad constante del tramo BC, luego:

$v_1 = v_0 + at_1$

$v_1 = at_1$

$v_1 = (2\,m/s^2)(6s)$

$v_1 = 12\,m/s$

$v_a = cte = 12\,m/s$

La distancia donde se encuentran es:

$D = v_c \times T$

$D = (10\,m/s)(18s)$

$D = 180\,m$

$D = d_1 + d_2 \quad pero\ T = 6 + t_2$

$v_c \times T = 36 + v_c t_2$

$10(6 + t_2) = 36 + 12t_2$

$60 + 10t_2 = 36 + 12t_2$

$12t_2 - 10t_2 = 60 - 36$

$2t_2 = 24$

$t_2 = 12\ s$

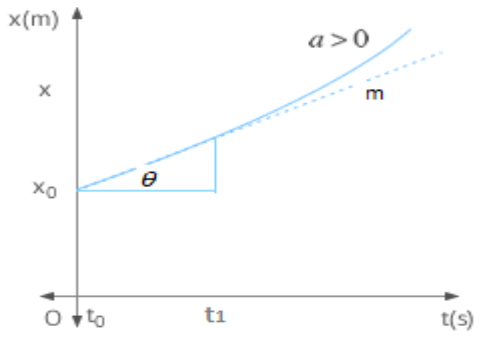
Por lo tanto

$T = (6 + 12)s$

$T = 18\ s$

Gráficas del MRUV

Posición vs tiempo



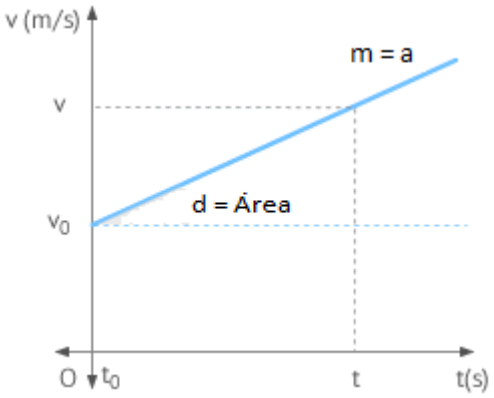
Le gráfica posición vs tiempo del MRUV es una parábola, de esta gráfica se puede determinar la rapidez de un cuerpo hallando la pendiente de la recta tangente en un punto y en un determinado intervalo de tiempo.

$$v = m\ (pendiente)$$

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

Velocidad vs tiempo

La recta inclinada cuya pendiente representa la aceleración de la partícula en un intervalo de tiempo.

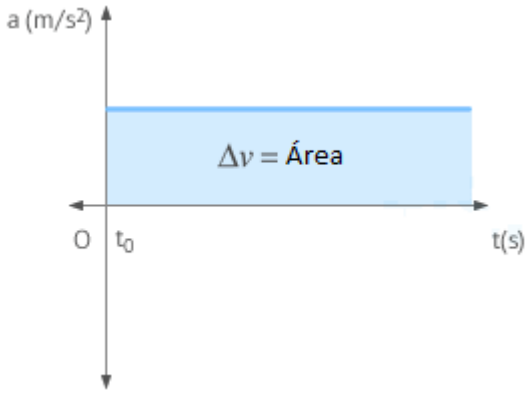


$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

Además de esta gráfica se puede determinar la distancia recorrida, hallando el área bajo la curva en los intervalos de tiepo.

$$d = Area\ bajo\ la\ curva$$

Aceleración vs tiempo



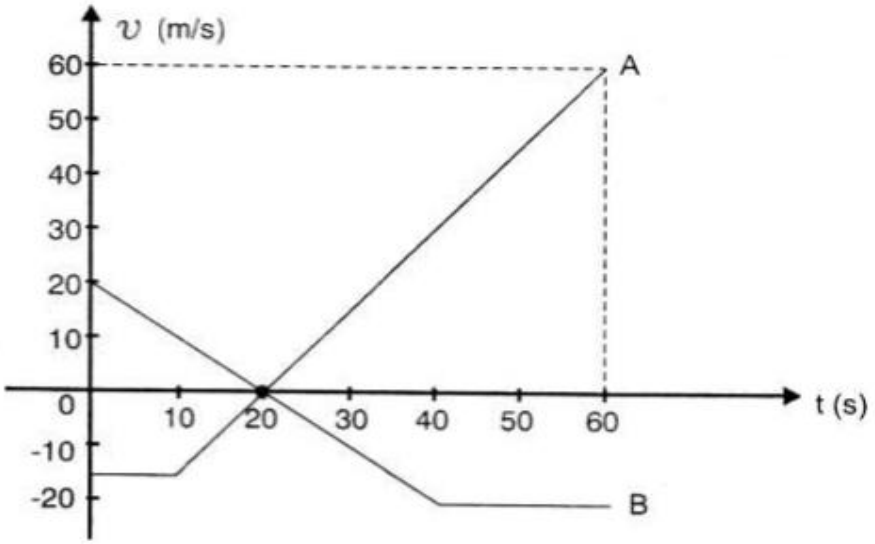
La gráfica a vs t es una recta paralela al eje que representa al tiempo ya que en ese intervalo de tiempo es constante.

De ésta gráfica se puede encontrar la velocidad de la partpicula hallando el área bajo la curva.

$$v = Area\ bajo\ la\ curva$$

Ejercicio resuelto

1) Dos partículas A y B se mueven de acuerdo con el gráfico velocidad vs tiempo a lo largo de una trayectoria rectilínea. Si las dos partículas parten del origen en t = 0 segundos; determinar:



a) El tipo de movimiento de la partícula en cada intervalo de tiempo
b) La distancia entre las dos partículas después de 20 segundos de haberse iniciado el movimiento
c) Donde y cuando se encontrarán
d) El gráfico de aceleración vs tiempo de las dos partículas

Solución a)

Partícula A

0(s) < t ≤ 10(s)	10(s) < t ≤ 20(s)	20(s) < t ≤ 60(s)
MRU porque la recta es paralela al tiempo.	MRUV desacelerado porque la velocidad va disminuñendo en valor absoluto.	MRUV acelerado porque la velocidad va aumentando en valor absoluto.

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

$a = \frac{-15 - (-15)}{10 - 0}$ $a = \frac{-15 + 15}{10}$ $a = 0\ m/s^2$	$a = \frac{0 - (-15)}{20 - 10}$ $a = \frac{15}{10}$ $a = 1{,}5\ m/s^2$ La aceleración tiene signo contrario al de la velocidad	$a = \frac{60 - 0}{60 - 20}$ $a = \frac{60}{40}$ $a = 1{,}5\ m/s^2$ La aceleración tiene el mismo signo de la velocidad

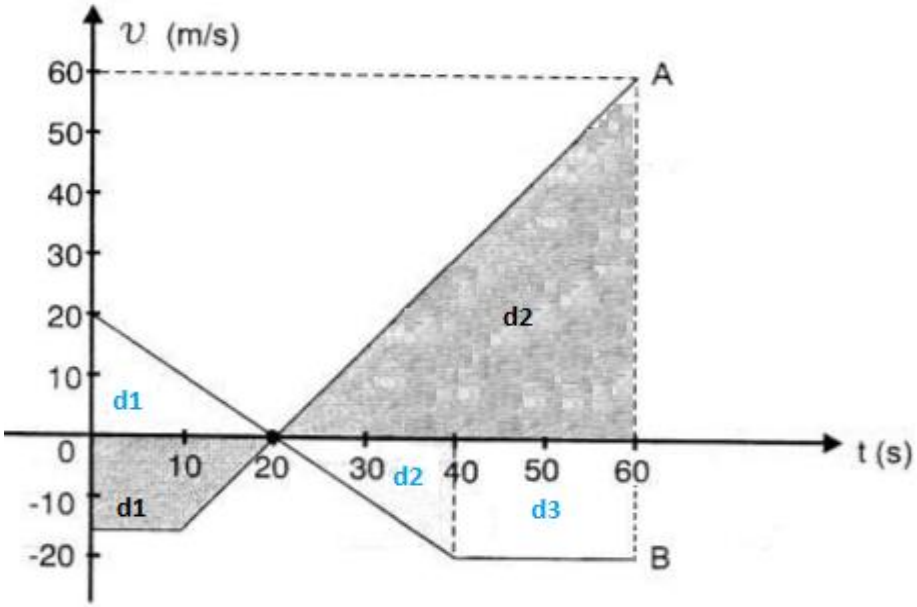
Partícula B

0(s) < t ≤ 20(s)	20(s) < t ≤ 40(s)	40(s) < t ≤ 60(s)
MRUV desacelerado porque la velocidad va disminuñendo en valor absoluto.	MRUV acelerado porque la velocidad va aumentando en valor absoluto.	MRU porque la recta es paralela al tiempo.

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

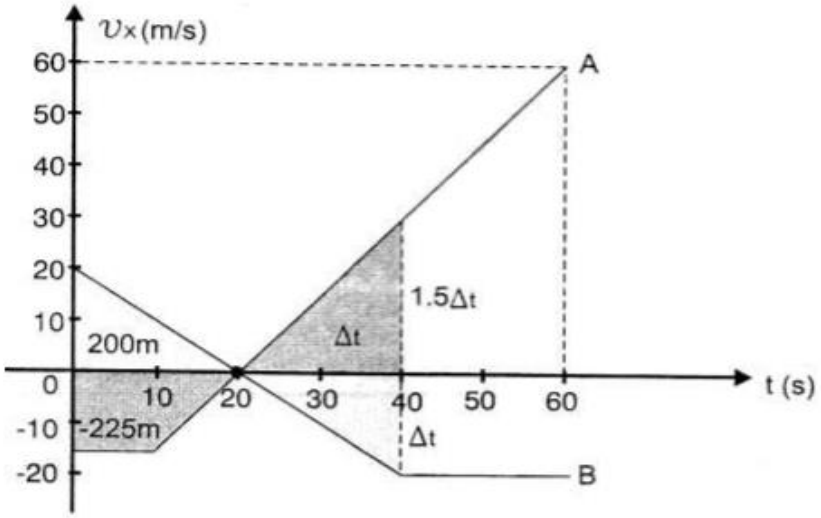
$a = \frac{0 - 20}{20 - 0}$ $a = \frac{-20}{20}$ $a = -1\ m/s^2$ La aceleración tiene signo contrario al de la velocidad	$a = \frac{-20 - 0}{40 - 20}$ $a = -\frac{20}{20}$ $a = -1\ m/s^2$ La aceleración tiene el mismo signo de la velocidad	$a = \frac{-20 - (-20)}{60 - 40}$ $a = \frac{0}{20}$ $a = 0\ m/s^2$

b) Para hallar las distancias calculamos el área bajo la curva en cada intervalo de tiempo.



Partícula A	Partícula B	
0(s) < t ≤ 20(s)	0(s) < t ≤ 20(s)	La distancia que los separa a laa partículas se obtiene sumando sus módulos
La figura geométrica es un trapecio	La figura geométrica es un triángulo	
$d_A = \frac{(B+b)h}{2}$ $d_A = \frac{(20+10)(-15)}{2}$ $d_A = -225\ m$	$d_B = \frac{b \times h}{2}$ $d_B = \frac{(20)(20)}{2}$ $d_B = 200\ m$	$\Delta r = d_B - d_A$ $\Delta r = 200 - (-225)$ $\Delta r = 200 + 225$ $\Delta r = 425\ m$

c) Para encontrar cuando y en donde se encuentra debemos utilizar los valores de aceleración encontrados en el literal "**a**" por lo que, para un intervalo de tiempo (Δt) la velocidad final será ($v_1 = a\ \Delta t$) .



Entre 20 y 40 segundos sucede el punto de encuentro por lo tanto hallamos el área de la figura geométrica bajo la curva, en este caso se forman dos triángulos rectángulos cuyos lados son: la hipotenusa es la aceleración, el un cateto corresponde a Δt y el otro a la velocidad final; por lo tanto tenemos que:

$$d_A = d_B$$

$$-225 + área_A = 200 + área_B$$

$$-225 + \frac{b \times h}{2} = 200 + \frac{b \times h}{2}$$

$$-225 + \frac{\Delta t \times 1{,}5\Delta t}{2} = 200 + \frac{(-1\Delta t)(\Delta t)}{2}$$

$$-225 + \frac{1{,}5\Delta t^2}{2} = 200 - \frac{\Delta t^2}{2}$$

$$\frac{1{,}5\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^2}{2} = 200 + 225 - \frac{\Delta t^2}{2}$$

$$1{,}25\Delta t^2 = 425$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{425}{1{,}25}}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{425}{1{,}25}}$$

Luego se encuentran:

$t = 20\ s + \Delta t$

$t = 20\ s + 18{,}44\ s$

$t = 38.44\ s$

$$d_B = 200 - \frac{\Delta t^2}{2}$$

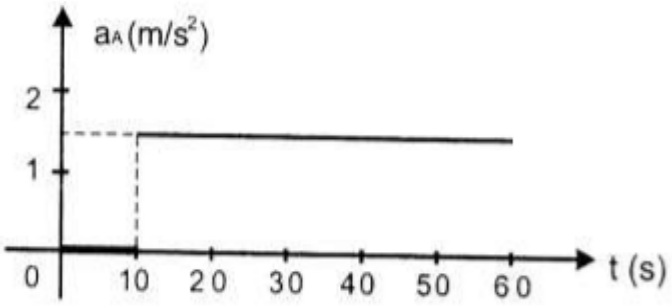
$$d_B = 200 - \frac{(18{,}44)^2}{2}$$

$d_B = 200 - 170$

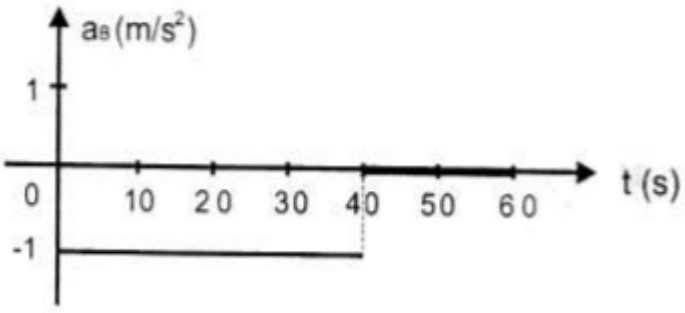
$d_B = 30\ m \quad a\ la\ derecha\ del\ origen$

d) Para trazar las gráfica de aceleración vs tiempo tomamos como referencia las aceleraciones calculadas en el litaral (**a**).

Partícula A



Partícula B



Movimiento vertical

Cuando se suelta un cuerpo a una determinada altura, éste cae a través de la vertical, para ello ejerce un movimiento que toma el nombre mencionado. Si el cuerpo es lanzado desde la superficie hacia "arriba" también describe una trayectoria vertical.

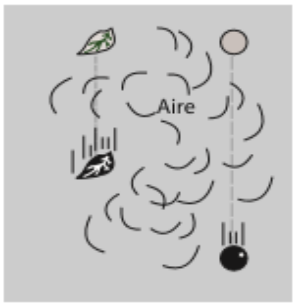
Caída libre

Es el movimiento vertical que realizan los cuerpos en el vacío.

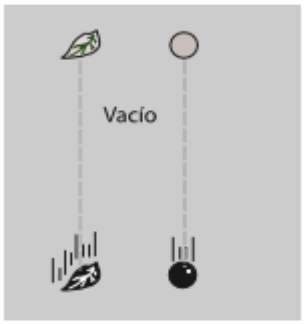
¿Por qué en el vacío? porque si un cuerpo es soltado en un medio como por ejemplo el aire, éste se opone al libre movimiento del cuerpo y por consiguiente, el movimiento no sería de caída libre.

Experiencia de Newton

- Al soltar simultáneamente una pluma y una piedra en el aire, la piedra llega primero que la pluma, puesto que sobre esta última el aire ejerce mayor resistencia (mayor superficie).



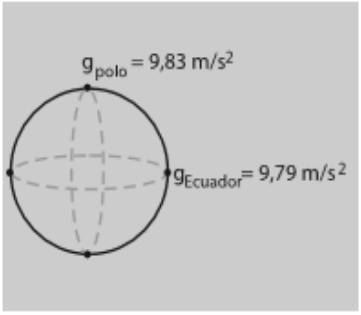
- Al soltar simultáneamente una pluma y una piedra en el vacío ambas llegan al mismo tiempo, puesto que sobre ambas no existe ninguna resistencia, por lo tanto caen con la misma aceleración.



Aceleración de la gravedad

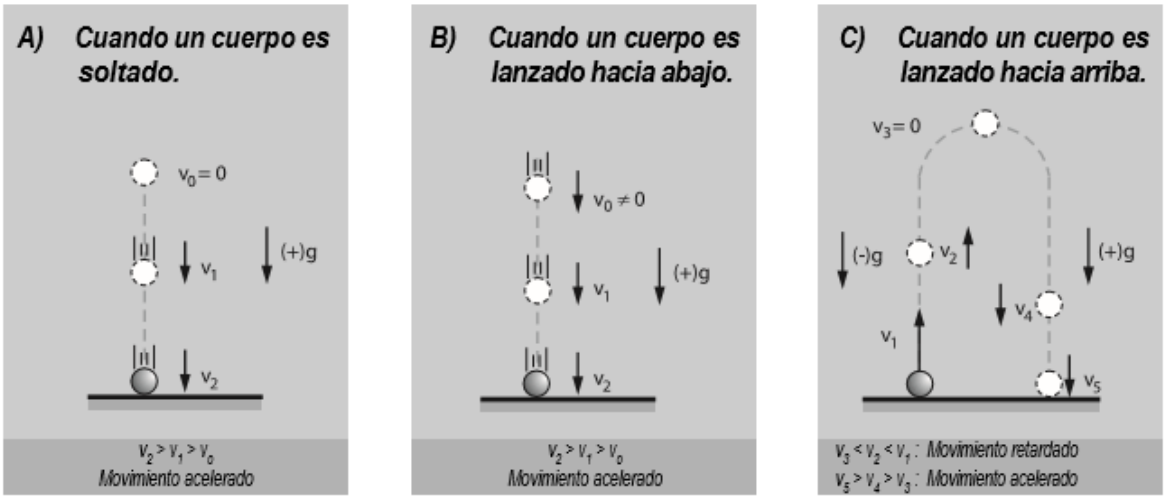
Es aquella aceleración con la cual caen los cuerpos. Su valor depende íntegramente del lugar en que se tome. En la superficie terrestre esta aceleración no es constante, esto se debe a que la tierra no es perfectamente esférica y además posee superficies accidentadas.

Sin embargo se considera como valor promedio al nivel del mar: ($g = 9.8\ m/s^2$)



Casos de caída libre

Cuando se estudia la caída libre de un cuerpo se deben considerar los siguientes casos:



Fórmulas de caída libre

Puesto que el movimiento de caída libre es un caso particular del M.R.U.V.; las fórmulas serán las mismas, con la diferencia de que la aceleración ya es conocida (g).

$g = \frac{v_1 - v_0}{t}$ $h = \frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2g}$ $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$	*Usar* g (+); si el cuerpo baja g (-); si el cuerpo sube

Ejercicios resueltos

1) Se dispara un cuerpo verticalmente hacía arriba con velocidad de 80 m/s. Calcular el tiempo que demora en alcanzar su máxima altura (g = 10 m/s2).

Datos

$v_0 = 80\, m/s$
$v_1 = 0$
$g = -10\, m/s^2$

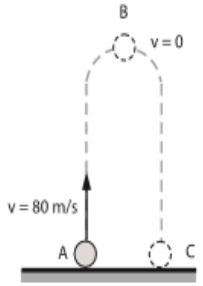
$$g = \frac{v_1 - v_0}{t}$$

Despejamos el tiempo

$$t = \frac{v_0}{g}$$

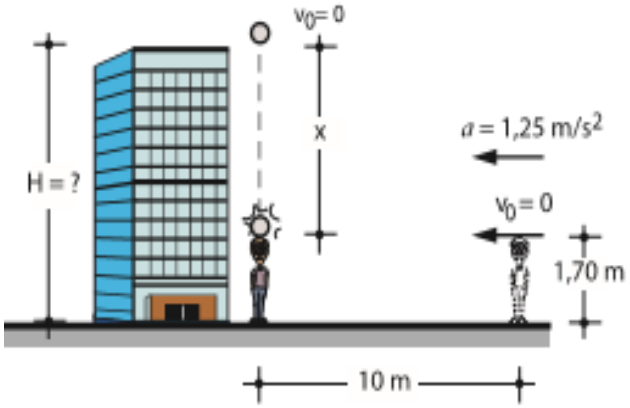
$$t = \frac{80\ m/s}{10\, m/s^2}$$

$$t = 8\, s$$



2) Desde el borde de la azotea de un edificio se suelta una esferita y en ese mismo instante un muchacho de 1,70 m de estatura, parado a 10 m del punto de impacto de la esferita, parte acelerado con 1,25 m/s2. Si al llegar a dicho punto, la esferita da en la cabeza del muchacho. ¿Qué altura tiene el edificio? (g = 10 m/s2

Datos



Debido a que la esfera y el muchaco llegan al mismo tiempo tenemos que:

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$d = \frac{1}{2} a t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(10m)}{1.25\ ^{m}/_{s^2}}}$$

$$t = 4\ s$$

Entonces

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = \frac{1}{2}(9.8\ m/s^2)(4\ s)^2$$

$$x = 80\ m$$

Planteamos la ecuación

$$H = x + 1.70\ m$$

$$H = 80\ m + 1.70\ m$$

$$H = 81.70\ m$$

TAREA Nº 6: Resuelva los siguientes ejercicios

1. *Un móvil que se desplaza a razón de 10 m/s ve incrementada su velocidad por una aceleración de 5 m/s^2. ¿Qué distancia habrá logrado avanzar durante los 2 primeros segundos de este movimiento variado?* ***Rpta. 30 m***

2. *Una gacela pasa por dos puntos con velocidad de 3 m/s y 7 m/s y M.R.U.V. Si dichos puntos están separados 50 m. ¿Qué tiempo empleó en el recorrido?*

Rpta. 10 s

3. *Un auto al pasar por dos puntos separados 180 m demoró 8 s. Si por el primer punto pasa con una velocidad de 20 m/s. Determinar con qué velocidad pasa por el segundo punto (en m/s).* ***Rpta. 25 m/s***

4. *Durante el 6to segundo de su desplazamiento una pelota logró avanzar 6 m, si su velocidad al inicio era de 28 m/s. ¿Con qué aceleración retardó uniformemente su movimiento?* ***Rpta. – 4 m/s^2***

5. *Dos móviles que parten del reposo en la misma dirección y sentido, están separados 200 m, si se observa que el alcance se produce 10 s después de iniciado los movimientos. Determinar sus aceleraciones si estas están en la relación de 3 a 1.*
   Rpta. $a_2 = 2\ m/s^2$; $a_1 = 6\ m/s^2$

6. *Un bote inicialmente en reposo acelera a razón de 2 m/s^2 durante 6 s, después de la cual se mueve con velocidad constante. En el instante que el bote parte, una lancha que se mueve en la misma dirección y sentido con velocidad constante de 10 m/s lo pasa. ¿Después de qué tiempo y a qué distancia se encontrarán nuevamente?*
   Rpta. 18 s ; 180 m

7. *Un ratón de regreso a su agujero, a la velocidad constante de 1 m/s, pasa al lado de un gato, despertándolo, si el gato acelera a razón de 0,5 m/s^2 y el agujero está a 5 m. ¿Atrapa el gato al ratón?. Si lo atrapa, ¿a qué distancia del agujero lo hace?*
   Rpta. Lo atrapa a 1 m del agujero

8. *Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y vuelve a tierra al cabo de 5 s. ¿Qué altura habrá recorrido en el último segundo de su movimiento? (g = 10 m/s^2).*
   Rpta. 20 m

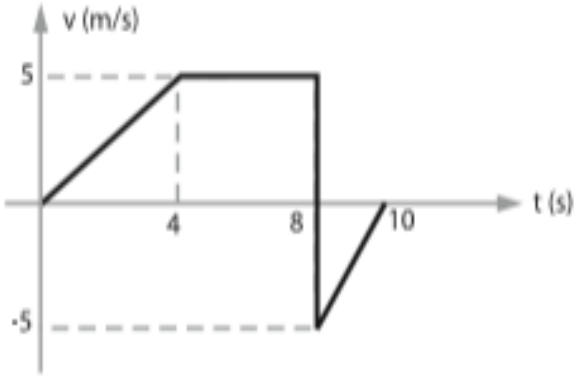
9. *Halle la velocidad con que fue lanzado un proyectil hacia arriba si ésta se reduce a la tercera parte cuando a subido 40 m (g = 10 m/s^2).* ***Rpta. 30 m/s***

10. Desde lo alto de un edificio se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 30 m/s llegando al piso luego de 8 s. Hallar la altura del edificio (g = 10 m/s2). **Rpta. 80 m**

11. Un globo aerostático asciende verticalmente con una velocidad cte. de 10 m/s. Una persona situada en el globo suelta una pelotita justo cuando el globo se encuentra a 120 m de altura respecto al suelo. ¿Luego de qué tiempo la pelotita impacta en el suelo? (g = 10 m/s^2). **Rpta. 6 s**

12. Un trozo de madera se suelta a un metro de distancia de la superficie libre de un estanque lleno de agua, si el agua produce una desaceleración de 4 m/s^2 sobre la madera. ¿Qué profundidad máxima alcanza la madera en el estanque? (g = 10 m/s^2).
   Rpta. 2,5 m

13. El gráfico representa el movimiento de un móvil en una línea recta. Hallar el desplazamiento, y el espacio recorrido por el móvil entre t = 0 s y t = 10 s



Rpta. Desplazamiento = 25 m
Espacio = 35 m

Movimiento en el plano (tiro parabólico)

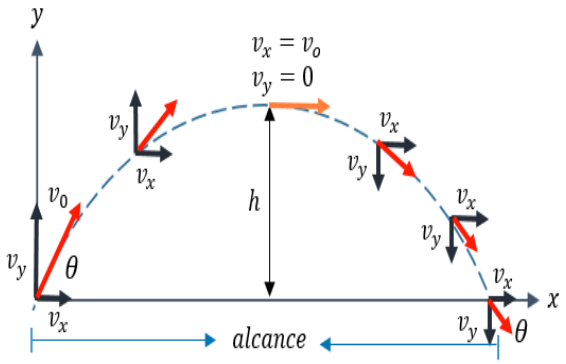
Como su nombre lo indica, es aquel movimiento en el cual la trayectoria es una parábola. Proviene generalmente de dos movimiento simples (M.R.U. y M.R.U.V.). Una aplicación directa de este movimiento es el problema del tiro.

Para que el cuerpo describa una parábola, es necesario que éste sea lanzado con un ángulo "ángulo de tiro" medido con la horizontal y de ahí en adelante se puede concluir que: en el eje de la "x" el movimiento es RU mientras que en el eje de las y se produce un MRUV es decir *este movimiento es compuesto.*

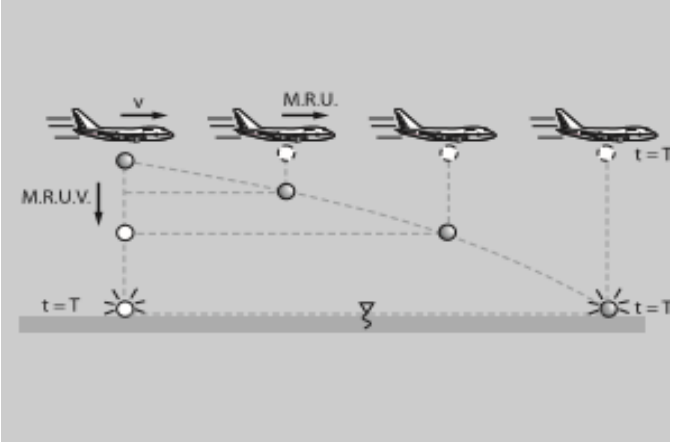
Viendo la gráfica se puede determinar que:

La componente de la velocidad en el eje de las "y" disminuye a medida que el cuerpo sube y aumenta en el descenso.

La componente de la velocidad en el eje "x" se mantiene constante.



El caso de un avión que vuela horizontalmente con velocidad constante (M.R.U.), sin en algún momento es dejado caer desde el avión un objeto, su movimiento resultante tendrá como trayectoria una semiparábola.



Para ambos casos la recomendación es utilizar el ***principio de independencia*** que dice: "Si un cuerpo tiene un movimiento compuesto, cada uno de los movimientos componentes, se cumplen como si los demás no existiesen".

En este sentido las ecuaciones que se utilizan para analizar el tiro parabólico se separan tanto para el eje de las "x" como para el eje de las "Y", se deja de tarea al estudiante deducir las ecuaciones de alcance, tiempo de vuelo, altura máxima, etc.

Fórmulas del tiro parabólico

Eje "x"	Eje "y"	
$x = v_{0x} \cdot t$	$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$	Altura máxima $y_{max} = \frac{{v_{oy}}^2}{2g}$
Componentes de la velocidad inicial $v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta$ $v_{0y} = v_0 \cdot sen\theta$	$v_{1y} = v_{0y} + gt$	Ángulo de caída $tan \propto = \frac{v_{1y}}{v_{0x}}$
Alcance $x = v_{0x} \cdot t_v$	$y = \frac{{v_{1y}}^2 - {v_{oy}}^2}{2g}$	Módulo de la velocidad final $v_1 = \sqrt{{v_{0x}}^2 + {v_{1y}}^2}$
	Tiempo de vuelo $t_v = \frac{2v_{0y}}{g}$	

Ejercicios resueltos

1) Una pelota sale rodando del borde de una mesa de 1,25 m de altura; si cae al suelo en un punto situado a 1,5 m del pie de la mesa. ¿Qué velocidad tenía la pelota al salir de la mesa? (g = 10 m/s^2).

Solución

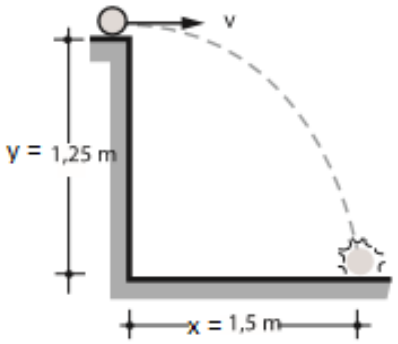
De la fórmula de altura, despejamos t

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(1.25m)}{10\, m/s^2}}$$

$$t = 0.5\ s$$



De la fómula de alcance despejamos v_{0x}

$$x = v_{0x} \cdot t$$

$$v_{0x} = \frac{x}{t}$$

$$v_{0x} = \frac{1.5\ m}{0.5\ s}$$

$$v_{0x} = 3\ m/s$$

2) Una pelota fue lanzada con una velocidad inicial de 10 m/s, formando con la horizontal un ángulo de 40°, hallar.

a) ¿Cuanto tiempo se encontró en movimiento?

b) ¿Hasta que altura subió la pelota?

c) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cayó la pelota?

Solución

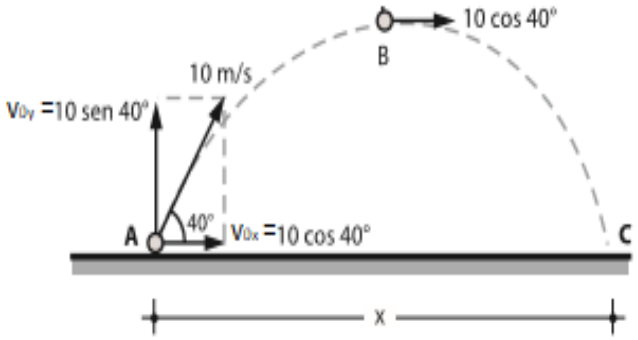
Hallamos las componentes de la velocidad inicial

$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta$
$v_{0x} = (10\,m/s)cos40°$
$v_{0x} = 7.66\ m/s$

$v_{0y} = v_0 \cdot sen\theta$
$v_{0y} = (10\,m/s)sen40°$
$v_{0y} = 6.42\ m/s$

a) Hallamos el tiempo de vuelo

$$t_v = \frac{2v_{0y}}{g}$$
$$t_v = \frac{2(6.42m/s)}{10\ m/s^2}$$
$t_v = 1.28\ s$



b) Hallamos la altura máxima

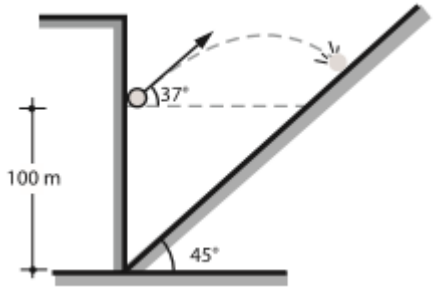
$$y_{max} = \frac{{v_{oy}}^2}{2g}$$
$$y_{max} = \frac{(6.42\ m/s)^2}{2(10\,m/s^2)}$$
$y_{max} = 2.06\,m$

c) Hallamos el alcance

$x = v_{0x} \cdot t_v$
$x = (7.66\ m/s)(1.28\ s)$
$x = 9.80\,m$

---

2) Una partícula es lanzada desde la ventana de un edificio ubicado a 100 m de altura, con una velocidad de 50 m/s y formando un ángulo de 37° con la horizontal. Determinar el tiempo que tarda en impactar con la colina (g = 10 m/s^2).



Solución

Hallamos las componentes de la velocidad inicial

$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta$

$v_{0x} = (50\,m/s)cos37°$

$v_{0x} = 40\ m/s$

$v_{0y} = v_0 \cdot sen\theta$

$v_{0y} = (50\,m/s)sen37°$

$v_{0y} = 30\ m/s$

Hallamos el alcance

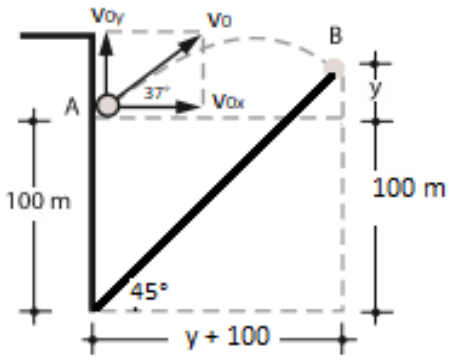
$x = v_{0x} \cdot t$ pero $x = y + 100$

Por lo tanto tenemos la ecuación

$y + 100 = v_{0x} \cdot t$

$y + 100 = 40\,t$

$y = 40\,t - 100$ (1)



Hallamos la altura

$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$y = 30t - 5t^2$ (2)

Igualamos las ecuaciones 1 y 2

$40\,t - 100 = 30t - 5t^2$

$5t^2 + 10t - 100 = 0$

Utilizando fórmula general tenemos

$t = \sqrt{21} - 1$

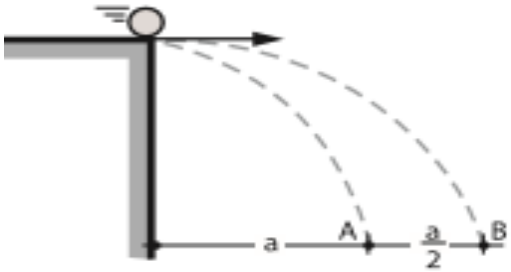
$t = 3.58\ s$

TAREA Nº 7: Resuelva los siguientes ejercicios

1. *Un avión vuela a 1470 m de altura con una velocidad horizontal de 144 km/h. ¿A qué distancia antes de estar sobre el blanco deberá soltar la bomba?*

   Rpta. $40\sqrt{294}\ m$

2. *En qué relación deben estar las velocidades de lanzamiento de la partícula si se desea que caiga en los puntos A y B.* ***Rpta.*** $\frac{V_A}{V_B} = \frac{2}{3}$



3. *Un cañón dispara un proyectil con una velocidad inicial de 100 m/s y a una inclinación de 37° con respecto al horizonte. Calcular a qué distancia llega.*

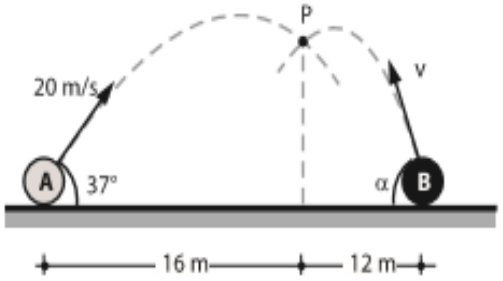
   Rpta. 960 m

4. *Un mortero dispara un proyectil bajo un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 100 m/s. Un tanque avanza, dirigiéndose hacia el mortero con una velocidad de 4 m/s, sobre un terreno horizontal. ¿Cuál es la distancia entre el tanque y el mortero en el instante del disparo, si hace blanco? (g = 10 m/s^2).*

   Rpta. 1056.6 m

5. *Dos cuerpos lanzados simultáneamente de los puntos "A" y "B" chocan en el punto "P" tal como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale "α" ? (g = 10 m/s²).*

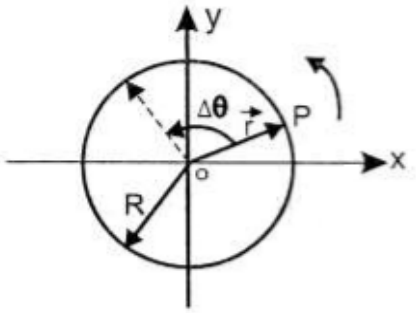
Rpta. 45°



6. Una pelota sale rodando del borde de una escalera con una velocidad horizontal de 1,08 m/s, si los escalones tienen 18 cm de altura y 18 cm de ancho. ¿Cuál será el primer escalón que toque la pelota? **Rpta. En el 2do escalón**

Movimiento circular

Es aquel movimiento en el cual la trayectoria es una circunferencia; a este movimiento se lo analiza también en el plano cartesiano por lo que su análisis se facilita si se hace coincidir el origen del sistema de referencia con el centro de la trayectoria.

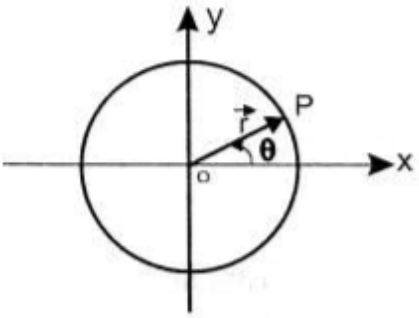


En el gráfico se puede notar que, mientras la partícula P se desplaza por la trayectoria circular de radio (R), su vector posición $(\overrightarrow{r})$ barre ángulos centrales $(\Delta\theta)$.

En este sentido a continuación se definen las variables de tipo angular que permiten analizar el movimiento:

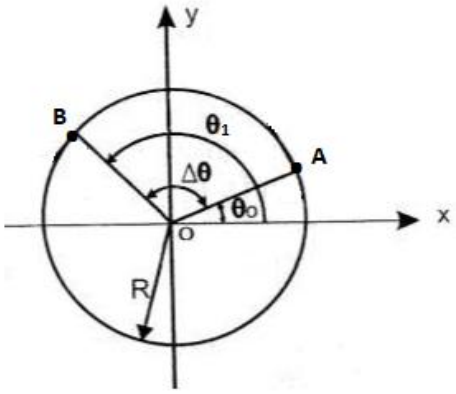
Posición angular

Es el ángulo (θ) que existe entre el vector posición de la partícula y un eje de referencia, que generalmente es el eje "x".



Desplazamiento **angular**

Se define como la variación neta de la posición angular de una partícula, respecto a un sistema de referencia.



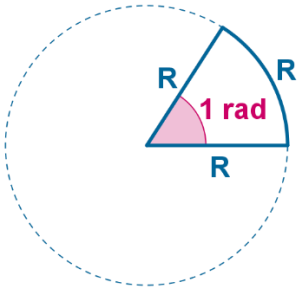
Fórmula de desplazamiento angular[4]

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$$

Para comprender el sistema de medida angular, a continuación se define el **radian.**

Radian

Se define como el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de una circunferencia, le corresponde un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.



De la definición se pueden establecer los siguientes factores de conversión:

$1\ rad = 57.3°$

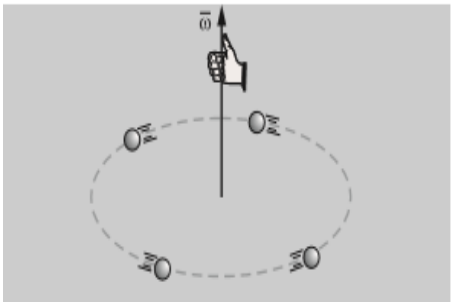
$\pi\ rad = 180°$

$2\pi\ rad = 360° = 1\ rev$

[4] La posición angular y el desplazamiento angular se mide en radianes

Velocidad angular media ($\bar{\omega}$)

Es aquella magnitud vectorial que nos indica cuál es el ángulo que puede recorrer un cuerpo en cada unidad de tiempo. Se representa mediante un vector perpendicular al plano de rotación; su sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha o del sacacorchos.



La velocidad angular se define como la razón entre el desplazamiento angular efectuado por una partícula y el tiempo empleado en dicho desplazamiento:

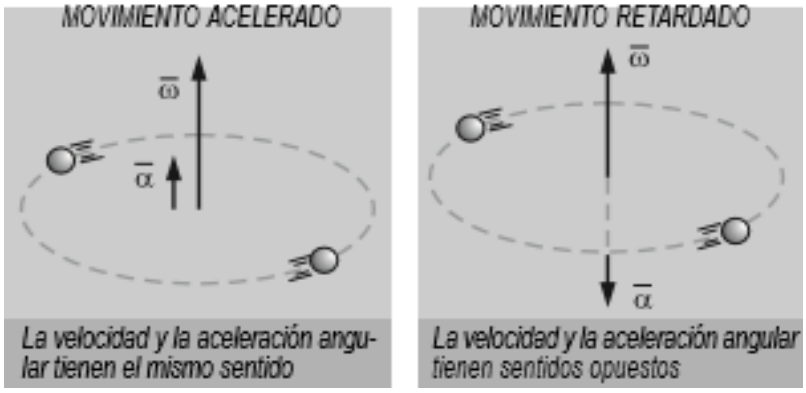
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

La velocidad angular se mide en

$$\frac{rad}{s}$$

Aceleración angular (α)

Es aquella magnitud vectorial que nos indica cuanto aumenta o disminuye la velocidad angular en cada unidad de tiempo. Se representa mediante un vector perpendicular al plano de rotación.



La aceleración angular se define como la razón entre la variación de la velocidad angular que experimenta una partícula y el intervalo de tiempo que se produjo.

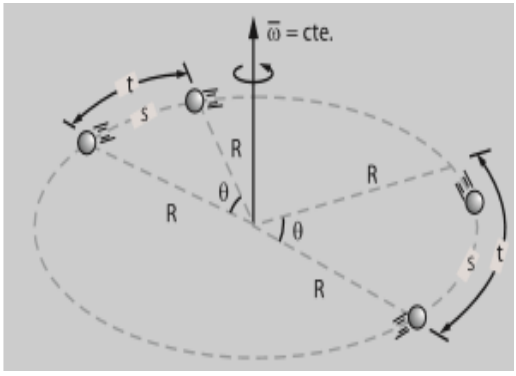
$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Las unidades de la aceleración angular son:

$$\frac{rad}{s^2}$$

Movimiento circular uniforme (MCU)

Es aquel movimiento en el cual el móvil recorre arcos iguales en tiempos iguales. En este caso la velocidad angular permanece constante, así como el valor de la velocidad tangencial.



Son ejemplos de este tipo de movimiento:

- El movimiento de las agujas del reloj.
- El movimiento de las paletas de un ventilador.
- El movimiento de un disco fonográfico.

El MCU es un movimiento períodico por lo que a continuación se definen los siguientes téminos:

Período

Es el tiempo que necesita una partícula para recorrer una vuelta completa

Si partimos de la fórmula

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

Pero una vuelta completa es igual a 360°, entonces.

$$\boldsymbol{\Delta\theta = 2\pi\, rad}$$

Reemplazando $\boldsymbol{\Delta\theta}$ se obtiene el *período angular*[5]

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi\, rad}{\omega}}$$

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi\, rad}{T}}$$

Frecuencia

Se define como el número de revoluciones que da una partícula en la unidad de tiempo.

$$\boldsymbol{T = \frac{t}{n} = \frac{tiempo}{\#\, vueltas}}$$

$$\boldsymbol{f = \frac{n}{t} = \frac{\#\, vueltas}{tiempo}}$$

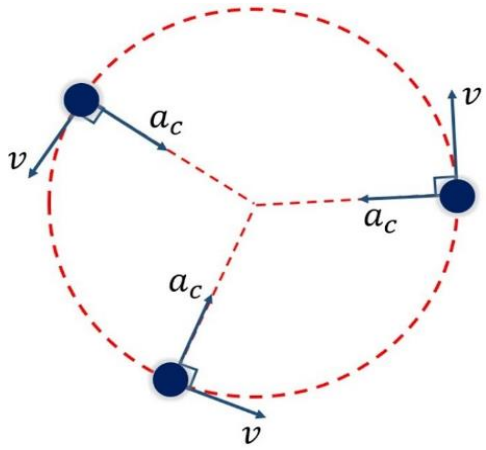
Luego la frecuencia es el inverso multiplicativo[6] del período y se mide en s^{-1}= Hz

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$$

Aceleración centrípeta

Debido a que en el MCU tanto la velocidad angular como la velocidad tangencial es constante, entonces no existe aceleración tangencial, sin embargo en este movimiento la partícula debido al cambio de dirección permanente se genera una *aceleración centípeta* o normal, que es igual a la aceleración total.

[5] El Período angular se mide en unidades de tiempo, generalmente en segundos.
[6] El inverso multiplicativo es una propiedad de la multiplicación $(a \times a^{-1} = 1)$



A la aceleración de un objeto que se mueve con movimiento circular uniforme, como resultado de una fuerza neta externa, la llamamos aceleración centrípeta.

La aceleración centrípeta es un vector dirigido hacia el entro de la trayectoria y se calcula con las siguientes fómulas:

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{r}} \qquad\qquad \boldsymbol{a_c = \omega^2 \cdot r}$$

Nota: La $\mathbf{a_c}$ es perpendicular a la **v**

Relación entre las medidas lineales y angulares

Dado que la trayectoria del MC es una circunferencia de radio **r**, se puede establecer la relación que existe entre este movimiento y el MR; de la siguiente manera:

Movimiento lineal			**Movimiento angular**		
d	distancia	Km, m, ft, in	$\Delta\theta$	Desplazamiento angular	rad, rev, grados
t	tiempo	h, min, seg	Δt	Variación de tiempo	h, min, seg
v	Velocidad tangencial	Km/h , m/s	ω	Velodidad angular	rad/s , RPM
a	Aceleración tangencial	m/s^2 , ft/min^2	α	Aceleración angular	rad/s^2

Fórmulas de la relación entre Movimiento Rectilíneo y Movimiento Circular

$$\boldsymbol{d = \Delta\theta \cdot r} \qquad\qquad \boldsymbol{v = \omega \cdot r} \qquad\qquad \boldsymbol{a_t = \alpha \cdot r}$$

Como se puede observar todas las ecuaciones están en función del radio

Ejercicios resueltos

1) Una partícula que se mueve por una trayectoria circular de 1.6 m de radio, gira un ángulo de 125° cada 7 segundos. Determinar:

a) La velocidad angular de la partícula
b) La rapidez de una partícula
c) El período
d) La frecuencia
e) El módulo de la aceleración centrípeta

Solución

Datos

$r = 1.6\,m$
$\Delta\theta = 125°$
$\Delta t = 7\,s$

a)

$$\Delta\theta = 125° \times \frac{\pi\ rad}{180°} = 2.18\,rad$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{2.18\,rad}{7\,s}$$

$$\omega = 0.31\,rad/s$$

b)

$$v = \omega \cdot r$$

$$v = (0.31\frac{rad}{s})(1.6\,m)$$

$$v = 0.50\,m/s$$

c)

$$T = \frac{2\pi\ rad}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi\ rad}{0.31\ rad/s}$$

$$T = 20.27\,s$$

d)

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{20.27\,s}$$

$$f = 0.049\,s^{-1}$$

e)

$$a_c = \omega^2 \cdot r$$

$$a_c = (0.31)^2(1.6)$$

$$a_c = 0.16\,m/s^2$$

---

2) Un cuerpo parte del punto (-2 ; 6) m y gira en sentido antihorario a 500 RPM durante 4 s. si el centro de la circunferencia esta en el origen, determinar:

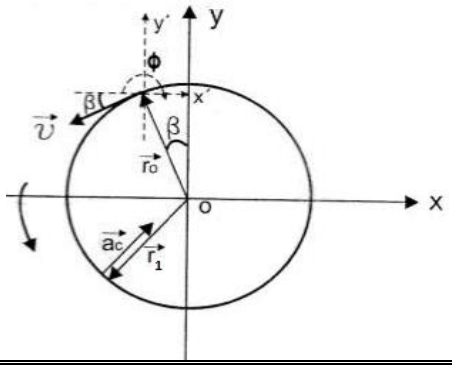
a) La velocidad angular
b) La posición angular inicial
c) La posición angular final
d) La posición final
e) Cuántas vueltas dio en los 4 s
f) El período
g) La velocidad en la posición inicial
h) La aceleración centrípeta en la posición final

Solución

Datos

$\vec{r}_0 = (-2\vec{i} + 6\vec{j})m$
$\omega = 500\ RPM$
$\Delta t = 4\,s$

Gráfico



a) $\omega = 500\ \frac{rev}{min} \times \frac{2\pi\ rad}{1 rev} \times \frac{1 min}{60\ s}$

$\omega = 52.36 \frac{rad}{s}$

b) Convertimos en polar la posición inicial

$\vec{r}_0 = (-2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath})m$

$\vec{r}_0 = (6.32\ m\ ; 108.43°)$

$\theta_0 = 108.43°$

$\theta_0 = 108.43° \times \frac{\pi\ rad}{180°} = 1.89\ rad$

c) $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$

$\Delta\theta = 52.36 \frac{rad}{s} \times 4\ s$

$\Delta\theta = 209.44\ rad$

$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$

$\theta_1 = \Delta\theta + \theta_0$

$\theta_1 = 209.44\ rad + 1.89\ rad$

$\theta_1 = 211.33\ rad$

$\theta_1 = 12108.32°$

d) Convertimos en coordenadas rectangulares

$\vec{r}_1 = (6.32\ m\ ;\ 12108.32°)$

$\vec{r}_1 = (-4.2\ ;\ -4.72)m$

e) $n = 209.44\ rad \times \frac{180°}{\pi\ rad}$

$n = 33.33\ rev$

f) $T = \frac{2\pi\ rad}{\omega}$

$T = \frac{2\pi\ rad}{52.36\ rad/s}$

$T = 0.12\ s$

g) Convertimos en coordenadas rectangulares

$v = \omega \cdot r$

$v = 52.36 \times 6.32$

$v = 330.92\ m/s$

h) $a_c = \omega^2 \cdot r$

$a_c = \left(52.36 \frac{rad}{s}\right)^2 (6.32m)$

$a_c = 17326.72\ \frac{m}{s^2}$

$\beta = 108.43° - 90°$

$\beta = 18.43°$

$\emptyset = 180° + 18.43°$

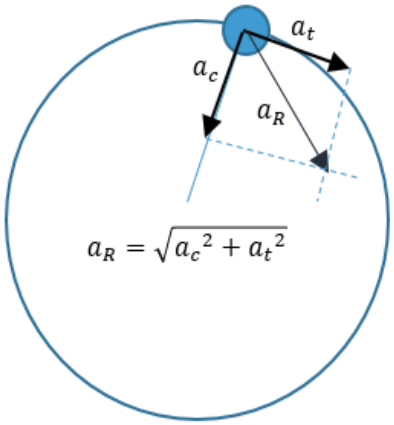
$\emptyset = 198.43°$

$\vec{v} = \left(330.92 \frac{m}{s}; 198.43°\right)$

$\vec{v} = (-313.94\vec{\imath} - 104.62\vec{\jmath})$

Movimiento circular uniformemente variado (MCUV)

Es aquel movimiento en el cual la velocidad angular varía pero permanece constante la aceleración angular, así como el valor de la aceleración tangencial.



Como se observa en el gráfico la aceleración tangencial y centrípeta son perpendiculares y el módulo de la aceleración total o resultante se obtiene con teorema de pitágoras[7].

$$a_R = \sqrt{{a_c}^2 + {a_t}^2}$$

Vectorialmente la aceleración resultante se obtiene de la siguiente manera:

$$\vec{a}_R = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

[7] Teorema de Pitágoras: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

Formulas que rigen el M.C.U.V.

Movimiento Lineal	Movimiento Angular
$a = \frac{v_1 - v_0}{t}$	$\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t}$
$d = \frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2a}$	$\Delta\theta = \frac{{\omega_1}^2 - {\omega_0}^2}{2\alpha}$
$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\Delta\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2$

Ejercicios resueltos

1) Un cuerpo que esta girando por una trayectoria circular de 0.75 m de radio, tarda 3 s en girar un ángulo de $\frac{10}{3}\pi\, rad$, en ese tiempo alcanza una velocidadangular de 50 RPM. Determinar:

a) La velocidad angular media
b) La velocidad angular inicial
c) La aceleración angular
d) La rapidez inicial
e) La distancia recorrida
f) El módulo de la aceleración total final

Datos

$r = 0.75\, m$

$\Delta t = 3\, s$

$\Delta\theta = \frac{10}{3}\pi\, rad = 10.47\, rad$

$\omega_1 = 50\, rpm = 5.24\, \frac{rad}{s}$

a) $\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\overline{\omega} = \frac{10.47\, rad}{3\, s}$

$\overline{\omega} = 3.49\, \frac{rad}{s}$

b) Como hay dos incognitas debemos armar un sistema de ecuacioes

$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$10.47 = \omega_0(3) + \frac{1}{2}\alpha(3)^2$

$10.47 = 3\omega_0 + 4.5\alpha \qquad (1)$

$\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t}$

$\alpha = \frac{5.24 - \omega_0}{3} \qquad (2)$

Reemplazamos 2 en 1

$10.47 = 3\omega_0 + 4.5\left(\frac{5.24 - \omega_0}{3}\right)$

$10.47 = 3\omega_0 + 7.86 - 1.5\omega_0$

$10.47 - 7.86 = 1.5\omega_0$

$\omega_0 = \frac{2.61}{1.5}$

$\omega_0 = 1.74\, rad/s|$

c) $\alpha = \dfrac{\omega_1 - \omega_0}{t}$

$\alpha = \dfrac{5.24\,\frac{rad}{s} - 1.74\,\frac{rad}{s}}{3\ s}$

$\alpha = 1.17\ \dfrac{rad}{s^2}$

d) $v_0 = \omega_0 \cdot r$

$v_0 = (1.74\ rad/s)(0.75\ m)$

$v_0 = 1.31\,\dfrac{m}{s}$

e) $d = \Delta\theta \cdot r$

$d = (10.47\ rad)(0.75\ m)$

$d = 7.85\ m$

$a_{c1} = {\omega_1}^2 \cdot r$

$a_{c1} = \left(5.24\ \dfrac{rad}{s}\right)^2\ (0.75\ m)$

$a_{c1} = 20.59\ \dfrac{m}{s^2}$

f) $a_t = \alpha \cdot r$

$a_t = \left(1.17\ \dfrac{rad}{s^2}\right)(0.75\ m)$

$a_t = 0.88\ \dfrac{m}{s^2}$

$a_R = \sqrt{{a_c}^2 + {a_t}^2}$

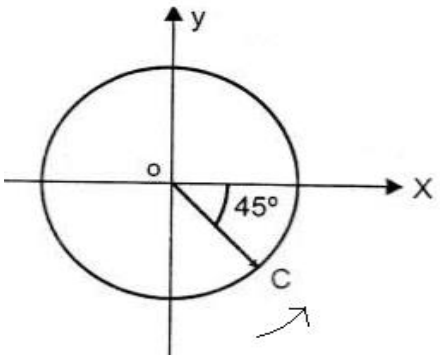
$a_R = \sqrt{(20.59)^2 + (0.88)^2}$

$a_R = 20.61\,\dfrac{m}{s^2}$

---

2) Una partícula parte del reposo desde el punto C como se muestra en la figura. Si se mueve en sentido antihorario con una aceleración tangencial constante de 3 m/s^2 y gira un ángulo de 780° en una trayectoria circular de 2 m de radio. Determinar:

a) La aceleración angular
b) La velocidad angular final
c) El tiempo empleado
d) La posición angular final
e) La posición final
f) La velocidad final
g) La aceleración total final



Datos

$\omega_0 = 0$

$a_t = 3\ m/s^2$

$\Delta\theta = 780° = 13.61\ rad$

$r = 2\ m$

a) $\alpha = \dfrac{a_t}{r}$

$\alpha = \dfrac{3\ m/s^2}{2\ m}$

$\alpha = 1.5\ rad/s^2$

b) ${\omega_1}^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\Delta\theta$

$\omega_1 = \sqrt{2\alpha\Delta\theta}$

$\omega_1 = \sqrt{2(1.5 rad/s^2)(13.61 rad)}$

$\omega_1 = 6.39\ rad/s$

c) $\Delta t = \dfrac{\omega_1 - \omega_0}{\alpha}$

$\Delta t = \dfrac{\omega_1}{\alpha}$

$\Delta t = \dfrac{6.39\ rad/s}{1.5\ rad/s^2}$

$\Delta t = 4.26\ s$

d) Según el gráfico

$\theta_0 = 360° - 45°$

$\theta_0 = 315°$

$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$

$\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta$

$\theta_1 = 315° + 780°$

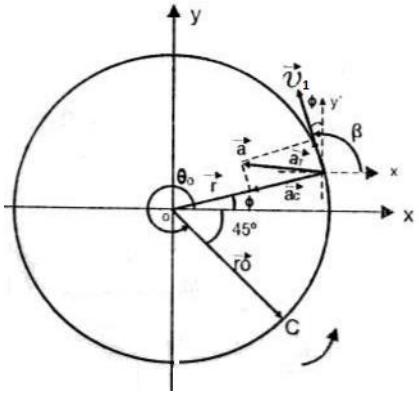
$\theta_1 = 1095°$

$\theta_1 = 1095° \times \dfrac{\pi\ rad}{180°}$

$\theta_1 = 19.11\ rad$

e) $\vec{r}_1 = (r\,;\theta_1)$
$\vec{r}_1 = (2\,m\,;\,1095°)$
$\vec{r}_1 = (1.93\vec{\imath} + 0.51\vec{\jmath})m$

Convertimos en polar
$\vec{r}_1 = (2\,m\,;15°)$
$\emptyset = 15°$
$\beta = 90° + \emptyset$
$\beta = 90° + 15°$
$\beta = 105°$



f) $\vec{v}_1 = (v_1\,;\,\beta)$
$\vec{v}_1 = \left(12.78\frac{m}{s};\,105°\right)$
$\vec{v}_1 = (-3.29\vec{\imath} + 12.35\vec{\jmath})\frac{m}{s}$

$v_1 = \omega_1 \cdot r$
$v_1 = (6.39\,rad/s)(2m)$
$v_1 = 12.78\,m/s$

g) $\vec{a}_t = a_t(\vec{u}_{v_1})$
$\vec{a}_t = 3\,m/s^2(-0.257\vec{\imath} + 0.966\vec{\jmath})$
$\vec{a}_t = (-0.77\vec{\imath} + 2.9\vec{\jmath})m/s^2$

$\vec{u}_{v_1} = \frac{\vec{v}_1}{v_1}$
$\vec{u}_{v_1} = \frac{\vec{v}_1}{v_1}$
$\vec{u}_{v_1} = \frac{-3.29\vec{\imath} + 12.35\vec{\jmath}}{12.78}$
$\vec{u}_{v_1} = -0.257\vec{\imath} + 0.966\vec{\jmath}$

h) $a_{c1} = {\omega_1}^2 \cdot r$
$a_{c1} = (6.39rad/s)^2 \cdot 2\,m$
$a_{c1} = 81.66\,m/s^2$

$\vec{a}_{c1} = a_{c1}(-\vec{u}_{r_1})$
$\vec{a}_{c1} = 81.66\,m/s^2(-0.965\vec{\imath} - 0.26\vec{\jmath})$
$\vec{a}_{c1} = (-78.8\vec{\imath} - 21.23\vec{\jmath})m/s^2$

$\vec{u}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{r}$
$\vec{u}_{r_1} = \frac{1.93\vec{\imath} + 0.51\vec{\jmath}}{2}$
$\vec{u}_{r_1} = 0.965\vec{\imath} + 0.26\vec{\jmath}$
$\vec{a}_R = \vec{a}_t + \vec{a}_c$
$\vec{a}_R = -0.77\vec{\imath} + 2.9\vec{\jmath} - 78.8\vec{\imath} - 21.23\vec{\jmath}$
$\vec{a}_R = (-79.57\vec{\imath} - 18.33\vec{\jmath})\,m/s^2$

TAREA Nº 8: Resuelva los siguientes ejercicios

1. *Un volante cuyo diámetro es de 1.5 m esta girando a 200 RPM. Determinar:*
    a. *La velocidad angular*
    b. *El período*
    c. *La frecuencia*
    d. *La rapidez de un punto del borde*
    e. *El módulo de la aceleración centrípeta*

2. *Una rueda de bicicleta tiene 60 cm de diámetro y recorre una distancia de 12 m en 15 s. Determinar:*
    a. *El ángulo girado*
    b. *El número de vueltas que dio*
    c. *La velocidad angular*

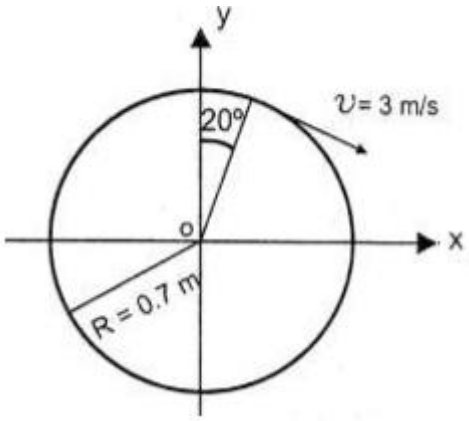
d. *El período*
e. *El módulo de la aceleración centrípeta*

3. *Una partícula animada de MCU parte del punto (2 , 7)m y gira alrededor del origen en sentido antihorario describiendo un ángulo de 215° en 6 s. Determinar:*

   a. *La velocidad angular*
   b. *La posición angular inicial*
   c. *La posición angular final*
   d. *El período*
   e. *La frecuencia*
   f. *La velocidad en la posición final*
   g. *La aceleración centrípeta en la posición inicial*

4. *Un cuerpo animado de MCU se encuentra en la posición que indica la figura en t = 2 s. Si se mueve en sentido horario hasta t = 8 s. Determinar:*

   a. *La velocidad angular*
   b. *El desplazamiento angular*
   c. *Cuántas vueltas da*
   d. *La distancia recorrida*
   e. *La posición final*
   f. *El período*
   g. *La velocidad en t = 2 s*
   h. *La aceleración centrípeta en t = 8 s*



5. *Un automóvil parte del reposo en una vía circular de 400 m de radio con MCUV hasta que alcanza una rapidez de 72 km/h en un tiempo de 50 s. Determinar:*

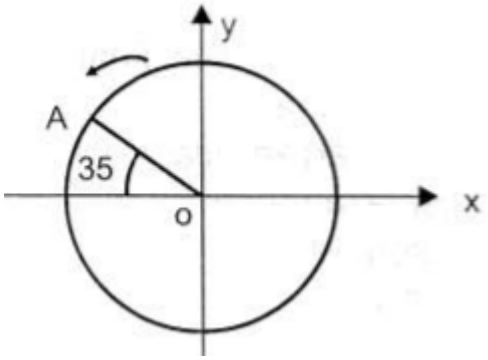
   a. *La velocidad angular final*
   b. *La velocidad angular media*
   c. *La aceleración angular*
   d. *La distancia recorrida*
   e. *El tiempo que tarda en dar 100 vueltas*
   f. *El módulo de la aceleración total*

6. *A una partícula que esta girando con una velocidad angular de 6 rad/s se le comunica una aceleración angular de 2.8 rad/s^2 durante 1 min. Si el radio de la trayectoria circular es de 60 cm; determinar:*

   a. *La rapidez inicial*
   b. *La velocidad angular final*
   c. *La rapidez final*
   d. *La velocidad angular media*
   e. *El desplazamiento angular*
   f. *Cuántas vueltas da*
   g. *El módulo de la aceleración total*

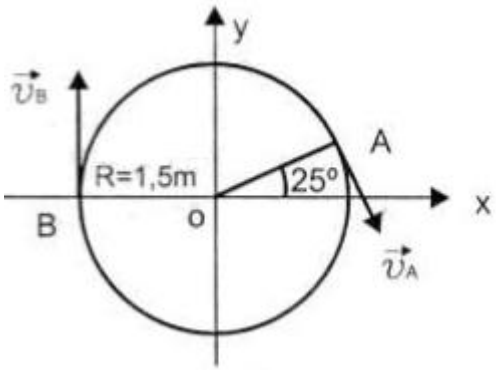
7. *Una partícula describe una trayectoria circular de 0.8 m de radio en sentido antihorario. Si parte del reposo y del punto A como se indica en la figura, realizando un desplazamiento angular de 10 rad en 3 s, determinar:*

   a. La aceleración angular
   b. La posición angular fina
   c. La posición final
   d. La velocidad angular media
   e. La distancia recorrida
   f. La velocidad final
   g. La aceleración total final



8. Una partícula animada de MCUV, parte del punto A, como indica la figura, con una rapidez de 4 m/s y luego de 3 s pasa por el punto B con una rapidez de 10 m/s. Determinar:

   1. La velocidad angular inicial
   2. La aceleración angular
   3. El desplazamiento angular
   4. La posición inicial
   5. La velocidad en B
   6. La aceleración total en A
   7. La aceleración total en B



SEGUNDO PARCIAL

UNIDAD IV DINÁMICA

Es una parte de la mecánica que se encarga de estudiar el movimiento de los cuerpos teniendo en cuenta las causas que lo producen.

A la causa que produce movimiento se le conoce con el nombre de ***Fuerza.***

Naturaleza de las fuerzas:

La fuerza mide el grado de interacción entre dos cuerpos.

Para el estudio de la Física en este ciclo, se hace necesario definir algunos tipos de fuerza que se generan en nuestro alrededor.

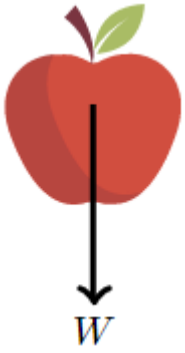
Fuerza gravitacional

Es la atracción que ocurre entre dos masas. Todas las masas ejecutan una fuerza gravitacional en todas las otras masas.

Peso (W)

Es la fuerza con la que todo campo gravitacional atrae a los cuerpos hacia el centro del mismo con una aceleración llamada gravedad.

La magnitud de esta fuerza se puede encontrar al multiplicar la masa “m” del objeto por la magnitud de la aceleración debida a la gravedad “g”.

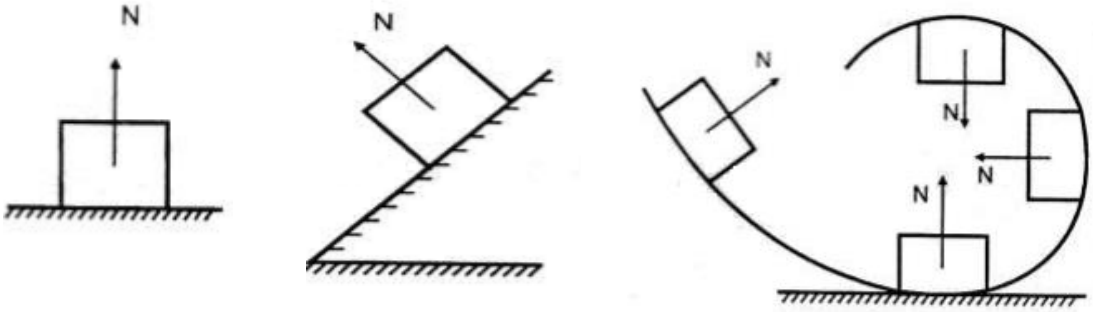


$$W = m \cdot g$$

Donde g = 9.8 m/s^2

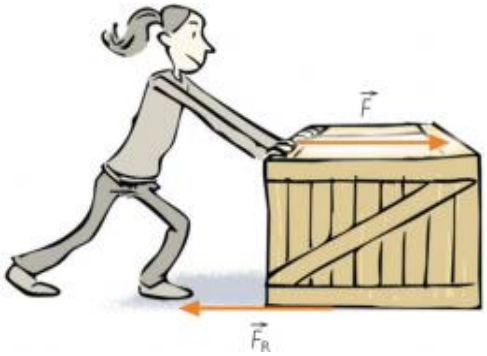
Fuerza Normal (N)

Es la fuerza que toda superficie ejerce sobre los cuerpos que se asientan en ella, la Normal es perpendicular a la superficie de contacto.



Fuerza de rozamiento (fr)

Es aquela que se genera cuando dos superficies se ponen en contacto y el uno tiende a moverse en relación al otro, es paralela a la superficie de contacto y su sentido es opuesto al movimiento relativo entre ellos.



Cuando dos superficies están en contacto y se intenta mover una de ellas respecto a la otra, aparece un valor que mide la oposición al desplazamiento entre ellas, dicho valor es conocido con el nombre de ***coeficiente de rozamiento***[8] y esta comprndido entre el intervalo [0 ; 1].

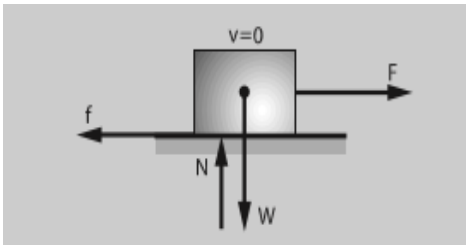
$$0 \leq \mu \leq 1$$

[8] El coeficiente de rozamiento es adimensional (no tiene unidades) y depende del material que están hechas las superficies.

Clases de rozamiento por deslizamiento

Rozamiento estático

Es el que se presenta entre superficies que se encuentran en reposo, el valor de la fuerza de rozamiento estático varía desde cero hasta un valor máximo, el cual lo adquiere cuando el cuerpo en contacto está a punto de moverse, pero sin conseguirlo (movimiento inminente).



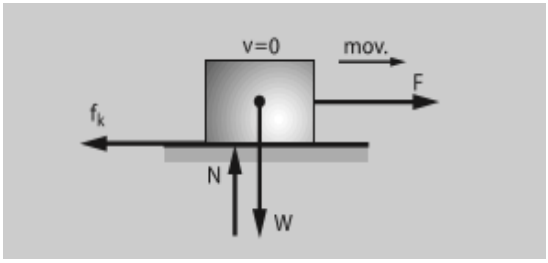
Este valor máximo de la fuerza de rozamiento estático equivale a la fuerza mínima para iniciar el movimiento, el cual puede calcularse mediante la siguiente fórmula.

$$fr_s = \mu_s \cdot N$$

Donde:
$fr_s = fuerza\ de\ rozamiento\ estático$
$\mu_s = coeficiente\ de\ rozamiento\ estático$
$N = fuerza\ normal$

Rozamiento cinético

Es aquella que se presenta cuando hay movimiento de un cuerpo respecto al otro.



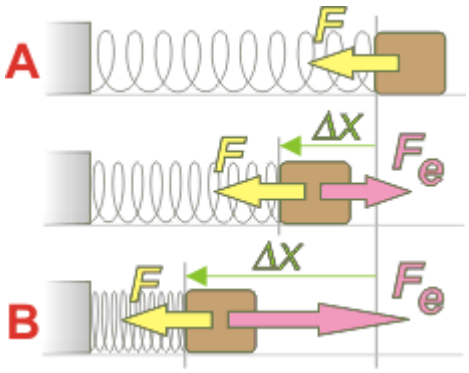
Cuando el cuerpo pasa del movimiento inminente al movimiento propiamente dicho, el valor de la fuerza de rozamiento disminuye y permanece casi constante, si es que la velocidad no es muy grande.

$$fr_k = \mu_k \cdot N$$

Donde:
$fr_k = fuerza\ de\ rozamiento\ cinético$
$\mu_k = coeficiente\ de\ rozamiento\ cinético$
$N = fuerza\ normal$

Fuerza elástica

Es aquella fuerza que se generan en cuerpos elásticos como muelles (resortes) de tal forma que cuando dejan de actuar fuerzan externas sobre él, este recupera su posición y forma originales, la fuerza que causa es recuperación toma el nombre de *Fuerza Elástica.*



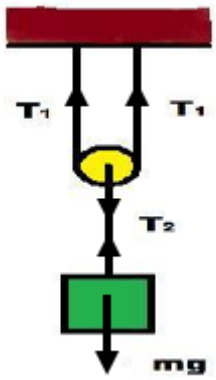
La fuerza elástica o (fuerza recuperadora) aplicada a un muelle es directamente proporcional a la deformación que se le produce.

$$\vec{F}_E = k \cdot \Delta\vec{x}$$

Donde:
$k = Constante\ elástica$
$\Delta x = deformación$
$Las\ unidades\ de\ k\ son: \frac{N}{m}$

Fuerzas tensoras

Son aquellas que se generan en cuerdas, cadenas, varillas, etc, y su función es la de transmitir la acción de una fuerza. En condiciones ideales la fuerza transmitida es la misma en cualquier sección de la cuerda, o sea que, la fuerza no se pierde.



Como se puede observar en la figura, el curpo de peso (mg) estira las cuerdas generando en las mismas fuerzas de tensión que apuntan hacia donde están sujetas.

Unidades de fuerza

La fuerza es una magnitud vectorial, cuyas unidades son las de una masa multiplicada por las de aceleración, luego tenemos que:

Sistema MKS	Sistema CGS	Sistema INGLÉS
$F = m \cdot a$	$F = m \cdot a$	$F = m \cdot a$
$F = Kg \cdot \frac{m}{s^2} = Newton = [N]$	$F = g \cdot \frac{cm}{s^2} = Dinas$	$F = slug \cdot \frac{ft}{s^2} = lbf$

Nota: 1 Newton es la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kilogramo.

Factores de conversión

1 [N] = 10^5 dinas

1 Kp = 1 Kgf = 9.8 [N]

1 Kgf = 2.205 lbf

Leyes de Newton

Las leyes de Newton constituyen verdaderos pilares de la mecánica, fueron enunciadas en la famosa obra de Newton “Principios Matemáticos de la Filosofía Natural”, publicada en 1686. Ellas son conocidas como la 1ra, 2da y 3ra Ley de Newton.

1ra Ley de Newton (Ley de la Inercia)

"Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se le obligue a cambiar ese estado por medio de fuerzas que actúen sobre el".

Inercia:

Se define como la medida de oposición que presenta un cuerpo a un cambio de su estado de reposo, se cuantifica en función de su masa es decir a mayor masa más inercia.

A la 1ra Ley de Newton se la conoce también con el nombre de ***Ley del Equilibrio*** ya que en este estado la partícula tiene aceleración es nula.

Las condiciones de equilibrio se resumen de la siguiente manera:

$$\sum Fx = 0 \qquad \sum Fy = 0 \qquad \sum \tau_A = 0$$

2da Ley de Newton (Ley de la dinámica o ley de la fuerza)

"La aceleración que adquiere una partícula es directamente proporcional a la fuerza Neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional al valor de su masa"

La condición de la 2da Ley de Newton se establece de la siguiente manera:

$$\sum F = m\,a$$

3da Ley de Newton (Ley de la acción y reacción)

"Si un cuerpo le aplica una fuerza a otro (acción); entonces el otro le aplica una fuerza igual y en sentido contrario al primero (reacción)".

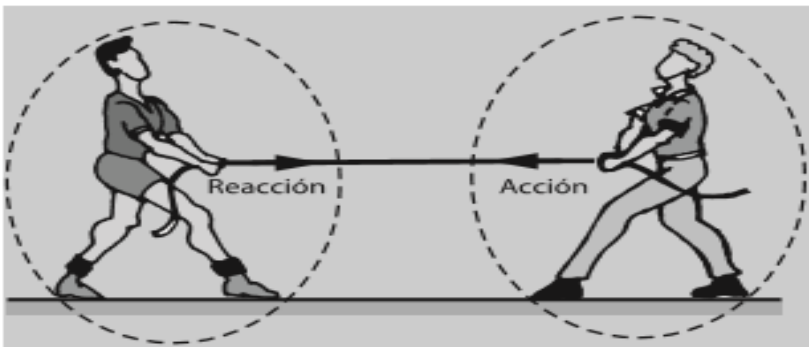
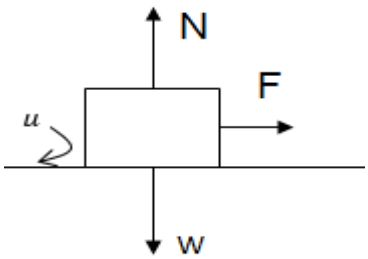


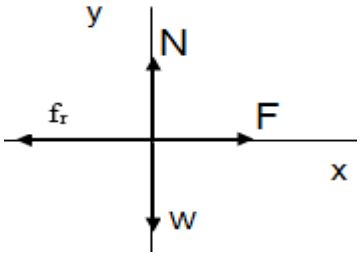
Diagrama de cuerpo libre

Es una representación gráfica utilizada a menudo para analizar las fuerzasn que actúan sobre un cuerpo.

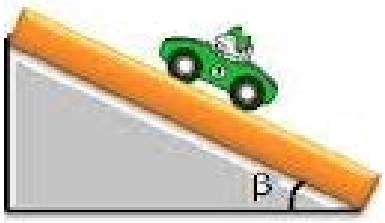
A continuación se presenta algunos ejemplos de diagramas de cuerpo libre, de acuerdo a la superficie en donde se encuentran ubicados los cuerpos:

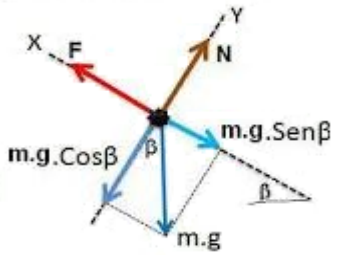
Cuerpo que se mueve en un plano horizontal con rozamiento





Cuerpo que se mueve en un plano inclinado sin rozamiento





Ejercicios resueltos

---

1) Un cuerpo de 10 Kg esta en reposo en el origen de coordenadas. Si en t=0 segundos se le apliaca una fuerza $\vec{F} = (25\vec{\imath} - 46\vec{\jmath})[N]$, determinar:

a) La posición del cuerpo en t = 10 s

b) La velocidad del cuerpo en t = 15 s

Solución

$$\sum Fx = ma_x \qquad \sum Fy = ma_y$$

$$\vec{a}_x = \frac{F_x}{m} \qquad \vec{a}_y = \frac{F_y}{m}$$

$$\vec{a}_x = \frac{25\vec{\imath}\ kg\ m/s^2}{10\ kg} \qquad \vec{a}_y = \frac{-46\vec{\jmath}\ kg\ m/s^2}{10\ kg}$$

$$\vec{a}_x = 2.5\vec{\imath}\,(m/s^2) \qquad \vec{a}_y = -4.6\vec{\jmath}\,(m/s^2)$$

a) Componentes de la posición

$$\vec{r}_x = \vec{v}_{ox} + \frac{1}{2}\vec{a}_x t^2 \qquad \vec{r}_y = \vec{v}_{oy} + \frac{1}{2}\vec{a}_y t^2$$

$$\vec{r}_x = \frac{1}{2}(2.5\vec{\imath})(m/\cancel{s^2})(10)^2(\cancel{s^2}) \qquad \vec{r}_y = \frac{1}{2}(-4.6\vec{\jmath})(m/\cancel{s^2})(10)^2(\cancel{s^2})$$

$$\vec{r}_x = 125\vec{\imath}\,(m) \qquad \vec{r}_y = -230\vec{\jmath}\,(m)$$

$$\vec{r} = (125\vec{\imath} - 230\vec{\jmath})m$$

b) Componentes de la velocidad

$\vec{v}_{1x} = \vec{v}_{0x} + \vec{a}_x t$
$\vec{v}_{1x} = \vec{a}_x t$
$\vec{v}_{1x} = (2.5\vec{\imath}\, m/s^2)(15\ s)$
$\vec{v}_{1x} = 37.5\ m/s$

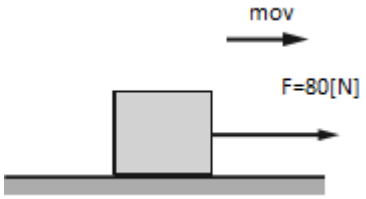
$\vec{v}_{1y} = \vec{v}_{0y} + \vec{a}_y t$
$\vec{v}_{1y} = \vec{a}_y t$
$\vec{v}_{1y} = (-4.6\vec{\jmath}\, m/s^2)(15\ s)$
$\vec{v}_{1y} = -69\vec{\jmath}\, m/s$

$$\vec{v}_1 = (37.5\vec{\imath} - 69\vec{\jmath})m/s$$

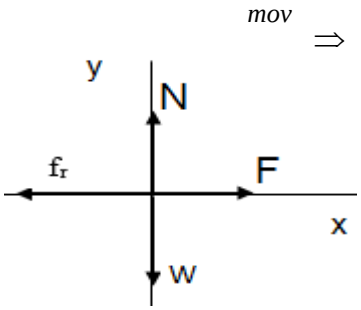
2) Una fuerza horizontal de 80 Newton arrastra un cuerpo de 8 kg sobre una superficie también horizontal cuyo coeficiente de rozamiento cinético es de $\mu_k = 0{,}2$. Calcular la aceleración del bloque (g = 10 m/s^2).

Solución

Graficamos el problema



Trazamos el diagrama de cuerpo libre



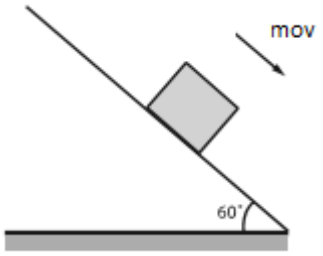
Aplicamos la 2° Ley de Newton

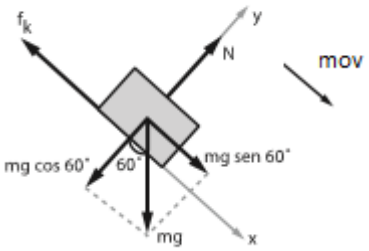
$\sum Fx = ma$
$F - f_r = m\,a$
$F - \mu N = m\,a$
$80 - 0.2(80) = 8\,a$
$80 - 16 = 8\,a$
$8\,a = 64$
$a = 8\ m/s^2$

$\sum Fy = 0$
$N - W = 0$
$N = W$
$N = mg$
$N = (8\ kg)\left(10\frac{m}{s^2}\right)$
$N = 80[N]$

3) Calcúlese la aceleración con que bajaría por un plano inclinado de 60° un cuerpo tal que su coeficiente de rozamiento con el plano sea $\mu_k = 0{,}4$. (g = 10 m/s^2).

Trazamos el diagrama de cuerpo libre





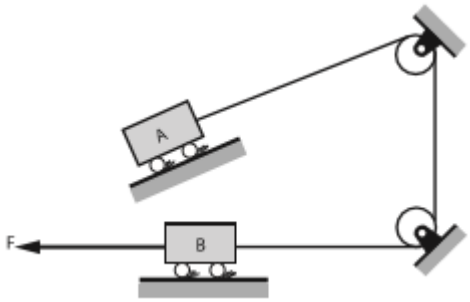
Solución

Aplicamos la 2° Ley de Newton

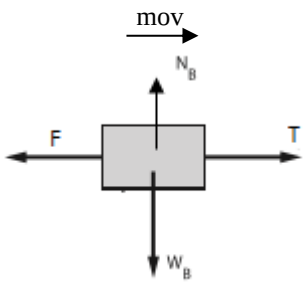
$$\sum Fx = ma$$
$$W_x - f_r = m\,a$$
$$mgsen60° - \mu N = m\,a$$
$$m(10)sen60° - 0.4(5m) = m\,a$$
$$8.66m - 2m = m\,a$$
$$6.66\,m = m\,a$$
$$a = 6.66\,m/s^2$$

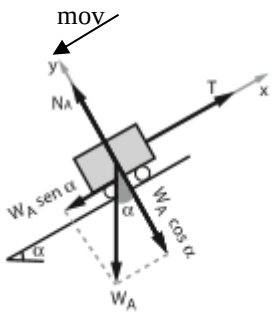
$$\sum Fy = 0$$
$$N - W_y = 0$$
$$N = W_y$$
$$N = mgcos60°$$
$$N = m(10)cos60°$$
$$N = 5m$$

4) Calcular el peso de "A" para que el sistema se mueva con velocidad constante debido a la fuerza constante F = 30 N aplicada en B; si la reacción en A es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}W_A$ $\left(N_A = \frac{\sqrt{3}}{2}W_A\right)$



CUERPO B ***CUERPO A***





$\sum Fx = 0$

$T - F = 0$
$T = F$
$T = 30\ [N]$

$\sum Fx = 0$

$W_A sen\alpha - T = 0$

$W_A = \dfrac{T}{sen\alpha}$

$W_A = \dfrac{30\ N}{sen30°}$

$W_A = 60\ [N]$

$\sum Fy = 0$

$N_A - W_A cos\alpha = 0$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} W_A = W_A cos\alpha$

$cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = 60°$

---

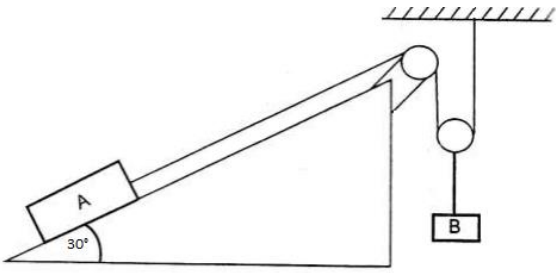
5) En la gráfica la masa del bloque A es 5 veces la del bloque B ($m_A = 5m_B$). Si el sistema se suelta desde el reposo, determinar la distancia recorrida por el bloque A a lo largo del plano inclinado y hacia donde, cuando han transcurrido 3 segundos. Considere que no hay rozamiento.

Condiciones en una polea móvil

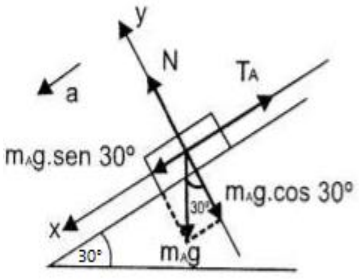
$d_A = 2d_B$

$v_A = 2v_B$

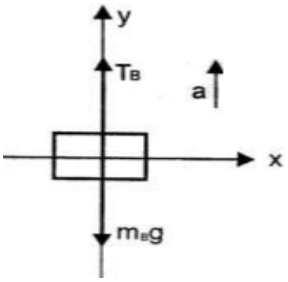
$a_A = 2a_B$



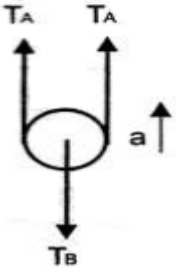
Cuerpo A



Cuerpo B



Polea Móvil



$\sum Fx = m_A a_A$

$m_A g sen30° - T_A = m_A a_A$

$T_A = m_A g sen30° - m_A a_A$

$Pero \quad m_A = 5m_B \quad y \quad a_A = 2a_B$

$T_A = 5m_B g sen30° - 5m_B 2a_B$

$T_A = 5gm_B sen30° - 10m_B a_B \qquad (1)$

$\sum Fy = m_B a_B$

$T_B - m_B g = m_B a_B$

$T_B = m_B g + m_B a_B \qquad (2)$

$\sum Fy = 0$

$2T_A - T_B = 0$

$T_B = 2T_A \qquad (3)$

Reemplazamos las ecuaciones (1) y (2) en la (3)

$$m_B g + m_B a_B = 2(5gm_B sen30° - 10m_B a_B)$$

$$m_B g + m_B a_B = 10gm_B sen30° - 20m_B a_B$$

$$21m_B a_B = 10gm_B sen30° - m_B g$$

$$21a_B = 10\left(9.8\frac{m}{s^2}\right) sen30° - 9.8\, m/s^2$$

$$21a_B = 49\, m/s^2 - 9.8\, m/s^2$$

$$a_B = 1.866\, m/s^2$$

Luego se obtiene que

$$a_A = 2(1.866\frac{m}{s^2})$$

$$a_A = 3.73\ \frac{m}{s^2}$$

Por lo tanto

$$d_A = v_0 t + \frac{1}{2} a_A t^2$$

$$d_A = \frac{1}{2} a_A t^2$$

$$d_A = \frac{1}{2}(3.73)(3)^2$$

$$d_A = 16.79\, m$$

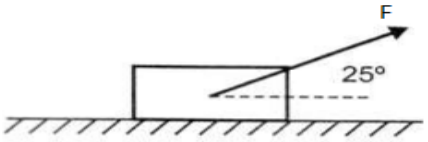
TAREA Nº 9: Resuelva los siguientes ejercicios

1. *Hallar la tensión en la cuerda (en Newton) y la aceleración del sistema (en m/s^2), de la siguiente figura. Desprecie el rozamiento (m_1 = 4 kg ; m_2 = 6 kg).*

Rpta. 12[N]; 2 m/s^2

2. *En la figura si el cuerpo es de 10 kg y $\mu_k = 0.15$. Determinar*

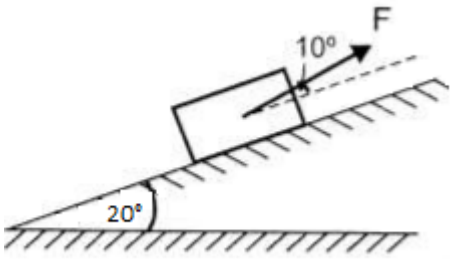
   a) *El valor de la fuerza para que el cuerpo se mueva con velocidad constante.*
   b) *El valor de la fuerza para que el cuerpo se mueva con una aceleración de 2 m/s^2.*



Rpta.15.16[N] y 35.78[N]

3. *En la figura si el bloque es de 10 kg y $\mu_k = 0.15$. Determinar*

   a) *El valor de F para que el cuerpo suba con velocidad constante.*
   b) *El valor de F para que el cuerpo baje con velocidad constante.*
   c) *El valor de F para que el cuerpo suba con aceleración de 0.7 m/s^2.*
   d) *El valor de F para que el cuerpo baje con aceleración de 0.7 m/s^2.*



Rpta. 46.86[N]; 20.55[N]; 53.79[N]; 13.24[N]

4. *Dos cuerpos del mismo peso inicialmente en reposo, se dejan el libertad sobre un plano inclinado de 30°, hallándose separados 25 cm. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo superior y el plado es 0.1 y entre el cuerpo inferior y el plano es 0.25. Determinar:*

   a) En qué tiempo el cuerpo superior alcanza al inferior

   b) La distancia recorrida por el cuerpo inferior hasta que es alcanzado por el superior.

Rpta. 0.64s ; 0.57m

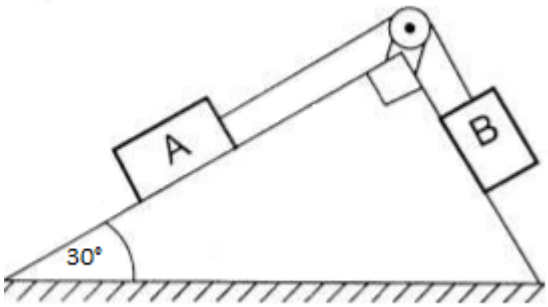
5. *En la figura los bloques A y B son de 45 y 15 kg respectivamente. Si* $\mu_k = 0.20$ *para todas las superficies. Determinar:*

   a) La aceleración de cada bloque.

   b) En qué sentido se mueven los bloques

   c) *La velocidad del bloque A 4 segundos después de partir del reposo.*

   d) *La tensión de las cuerdas*

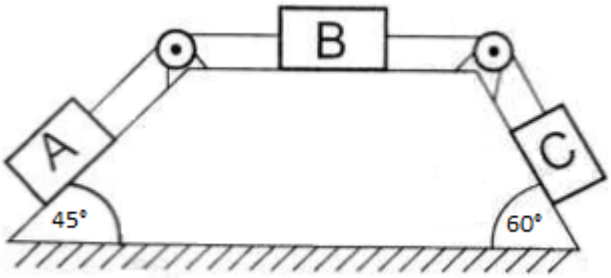


Rpta. 0.035 m/s^2; A hacia arriba; 0.14 m/s

6. *En el sistema de la figura se tiene que* $m_A = m_C = 15\ kg$. *Si* $\mu_A = 0.1$; $\mu_B = 0.2$ *y* $\mu_C = 0.3$. *Determinar:*

   a) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la derecha con velocidad constante.

   b) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la izquierda con una aceleración de 1.3 m/s^2.



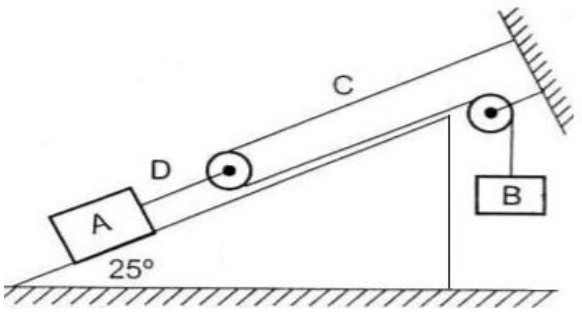
Rpta. 9.95 kg; 44.08 kg

7. *En el sistema de la figura los cuerpos A y B son de 18 y 16 kg respectivamente. Si* $\mu_k = 0.25$. *Determinar:*

   a) La aceleración de cada bloque.

   b) En qué sentido se mueve cada uno de los bloques.

   c) La tensión de las cuerdas C y D.



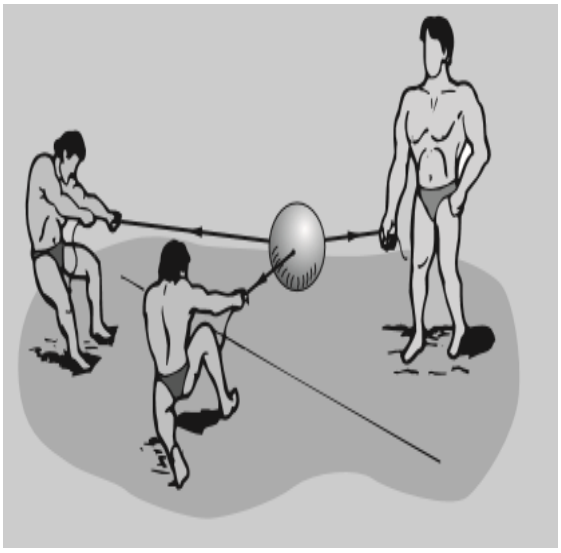
UNIDAD V ESTÁTICA

Equilibrio del sólido rígido

La estática es una rama de la mecánica cuyo objetivo es estudiar las condiciones que deben de cumplir las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, para que éste se encuentre en equilibrio.

Equilibrio

Un cuerpo cualquiera se encuentra en equilibrio cuando carece de todo tipo de aceleración (a = 0), es decir que la fuerza neta aplicada sobre una partícula sea nula o que la partícula se mueva con velocidad constante.



La esfera se encuentra en equilibrio porque las tres fuerzas concurrentes[9] y coplanares[10] se anulan.

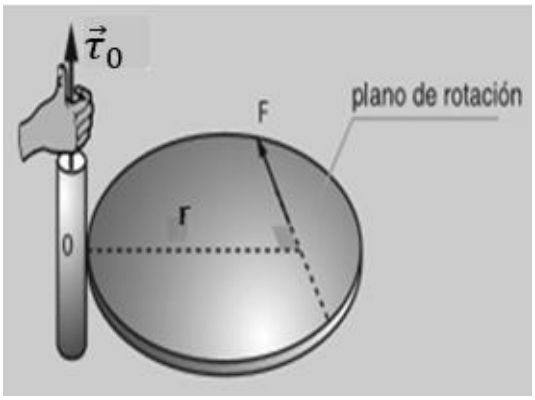
Para analizar las condiciones de equilibrio de un sólido rígido es necesario definir una nueva magnitud física, llamada *Torque o Momento de Fuerza.*

Torque o Momento de Fuerza

Es una magnitud vectorial, cuyo valor mide el efecto de giro que se produce sobre un cuerpo alrededor de un punto o eje.

El momento de fuerza se calcula multiplicando el valor de la fuerza F con la distancia perpendicular desde el punto "O" a la línea que contiene la fuerza "F".

[9] Conjunto de fuerzas que coinciden en un punto común.
[10] Conjunto de **fuerzas** que se encuentran en el mismo plano y que tiene el mismo punto de aplicación.



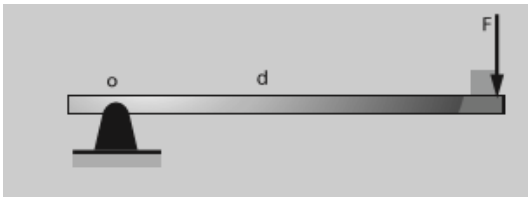
El momento o torque con respecto a un punto, se representa mediante un vector perpendicular al plano de rotación y el sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha.

$$\vec{\tau}_0 = \vec{F} \times \vec{r}$$

Unidades
Newton por metro = N m
Libra por pie = lb ft
Kilogramo metro = kg m

En el análisis de Torques o Momentos de fuerza se pueden distinguir los siguientes casos:

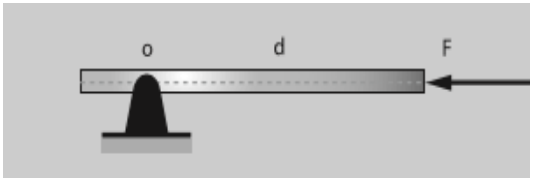
A)



Fuerza perpendicular a la barra.

$\tau_0 = F \times d$

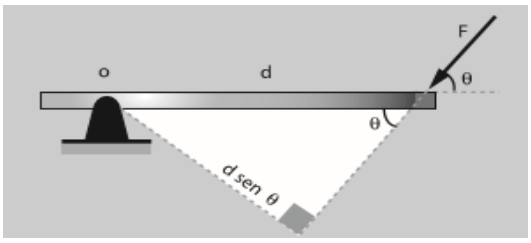
B)



Fuerza que coincide con el eje de rotación.

$\tau_0 = 0$

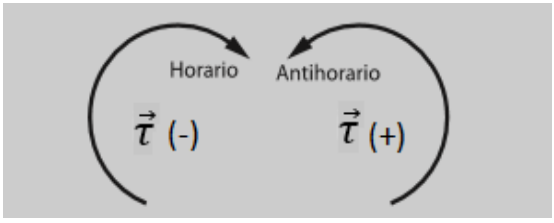
C)



Fuerza que forma un ángulo con la barra.

$\tau_0 = F \times d \times sen\theta$

Convención de signos

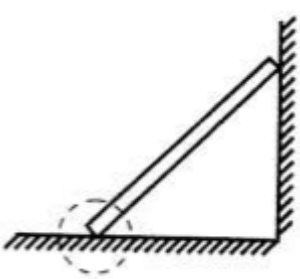


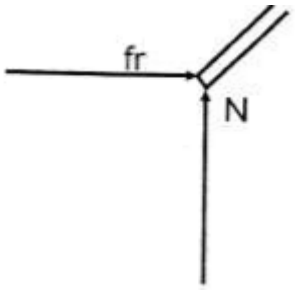
- Si una fuerza hace girar a un sólido en sentido horario, el Toque es "negarivo".
- Si una fuerza hace girar a un sólido en sentido antihorario, el Toque es "positiivo".

Reacciones en los apoyos

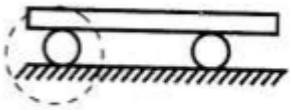
Los apoyos más comunes en los cuales se sustentan los sólidos son: apoyos de contacto, de rodillo, de pasador y de empotramiento.

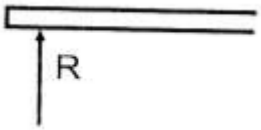
a) Contacto: En el contacto se generan dos reacciones, la normal y la fuerza de rozamiento (estática)





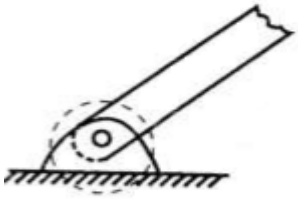
b) Rodillo: El rodillo sólo transmite una fuerza en dirección perpendicular a las superficies de contacto.

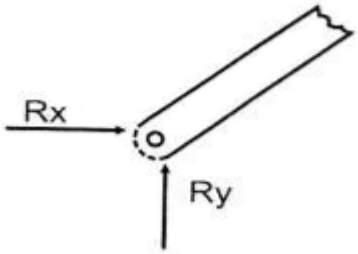




c) Pasador: En este apoyo se genera una reacción que se descompone en la componente "x" y la componente en "y".

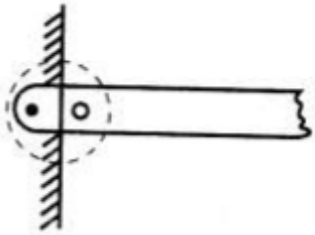
Este apoyo no impide la rotación del cuerpo.

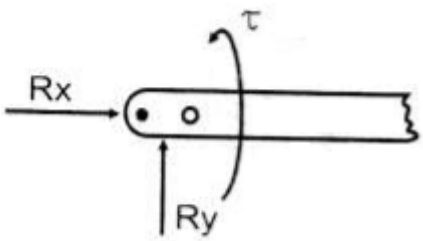




Nota:
Este apoyo no impide la rotación del cuerpo.

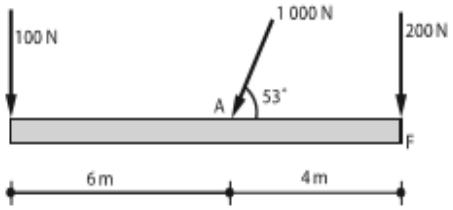
d) Empotramiento: Este apoyo impide la rotación del cuerpo sin embargo al igual al pasador, se generan reacciones en "x" e "y".





Ejercicios resueltos

1) Hallar la suma de momentos respecto al punto "A" según se muestra en el gráfico.



$$\sum \tau_A = \tau_{100} + \tau_{1000} + \tau_{200}$$

$$\sum \tau_A = (100N)(6m) + (1000N)(0m) - (200N)(4m)$$

$$\sum \tau_A = 600Nm - 800Nm$$

$$\sum \tau_A = -200Nm$$

2) Hallar la fuerza F que mantiene la placa en equilibrio si su peso es despreciable.

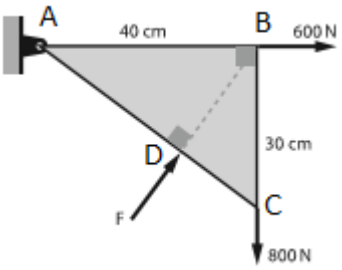
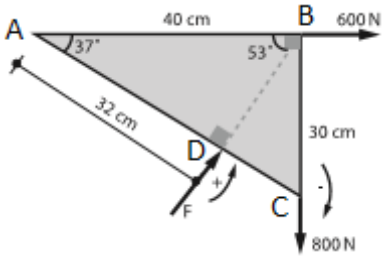


Diagrama de cuerpo libre



Resolvemos el triángulo rectángulo

$$tanA = \frac{30}{40}$$

$$A = tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right)$$

$$A = 37°$$

$$cos37° = \frac{AD}{40\ cm}$$

$$AD = 40\ cm(cos37°)$$

$$AD = 40\ cm(cos37°)$$

$$AD = 32\ cm$$

$$\sum \tau_A = 0$$

$$F(32cm) - (800N)(40cm) + (600N)(0cm) = 0$$

$$32F = 32000N$$

$$F = \frac{32000\ N}{32}$$

$$F = 1000\ N$$

3) Determine la tensión de la cuerda AB si la barra horizontal homogénea pesa 200 N.

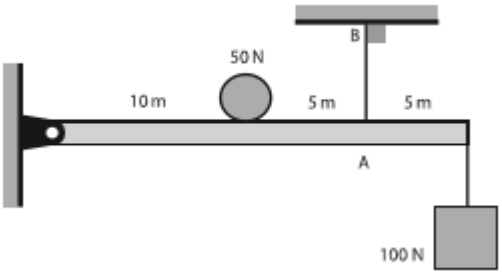
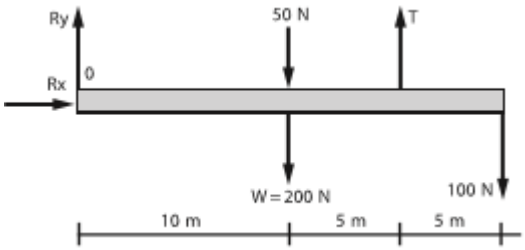


Diagrama de cuerpo libre



$$\sum \tau_O = 0$$

$$(200\ N)(10\ m) + (50\ N)(10\ m) - T(15\ m) + (100\ N)(20\ m) = 0$$

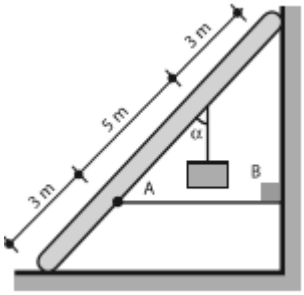
$$2000\ N + 500\ N - 15\ T + 2000\ N = 0$$

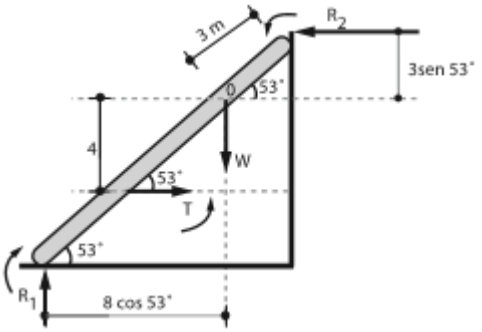
$$T = \frac{4500}{15}$$

$$T = 300\ [N]$$

---

4) Si no hay rozamiento, determinar la tensión del cable AB , que sujeta a la escalera, si es ingrávida (α = 37° ; W = 10 N)





$$\sum F_x = 0$$
$$T - R_2 = 0$$
$$T = R_2$$

$$\sum F_y = 0$$
$$R_1 - W = 0$$
$$R_1 = W$$
$$R_1 = 10\ [N]$$

$$\sum \tau_O = 0$$

$$-R_1(8\ cos53°) + T(4) + R_2(3\ sen53°) = 0$$

$$-4.814R_1 + 4T + 2.4R_2 = 0$$

$$-4.814(10N) + 4T + 2.4T = 0$$

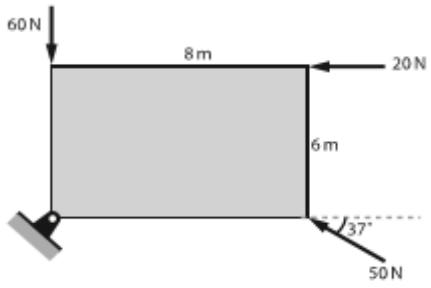
$$6.4T = 48.14$$

$$T = \frac{48.14}{6.4}$$

$$T = 7.52$$

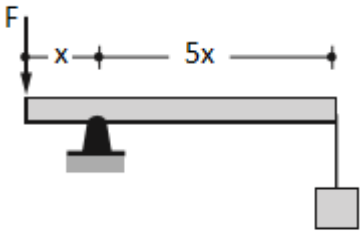
TAREA Nº 10: Resuelva los siguientes ejercicios

1. *Determinar el momento resultante y su sentido de rotación de una plancha rectangular de 8 m por 6 m de 40 N de peso.*



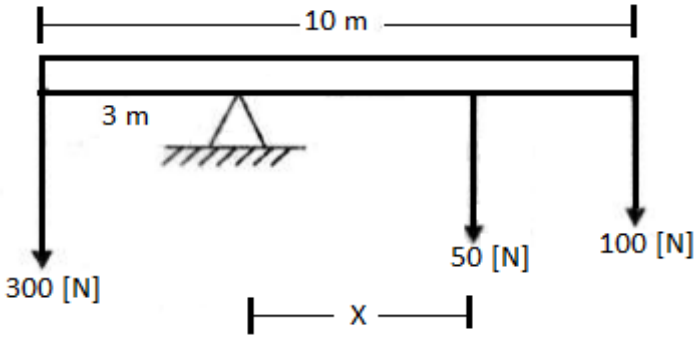
Rpta. 200 Nm, sentido antihorario

2. *Si la barra homogénea de 40 N se mantiene horizontal, determine "F" (el bloque es de 10 N).*



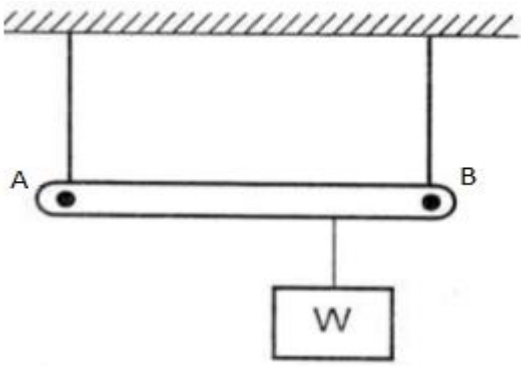
Rpta. 130 [N]

3. *En la figura representada, ¿cuál debe ser el valor de la distancia "x" en metros para que el sistema permanezca en equilibrio?. Considere despreciable el peso de la barra.*



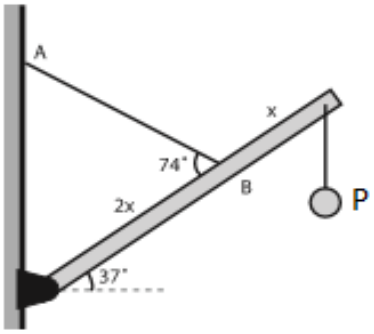
Rpta. 4 m

4. *La viga horizontal AB de la figura es uniforme y pesa 200 [N]. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas que soportan la viga cuando se cuelga un peso W = 100 [N] ubicada en la posición que se indica en la figura.*



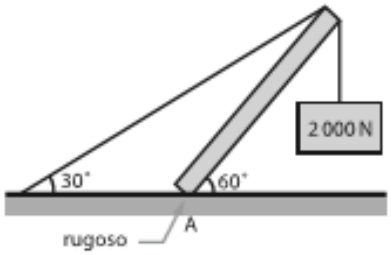
Rpta. 120 [N]; 180 [N]

5. *Si el sistema se encuentra en equilibrio, determíne la tensión en la cuerda AB, sabiendo que la barra homogénea es de 200 N (P = 400 N)*



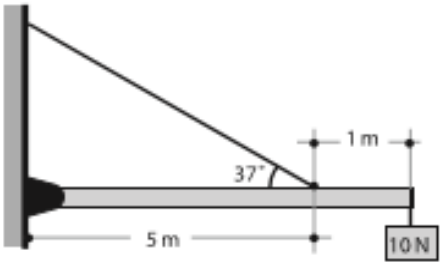
Rpta. 625 [N]

6. *Hallar la reacción en "A" si la barra es de peso despreciable.*



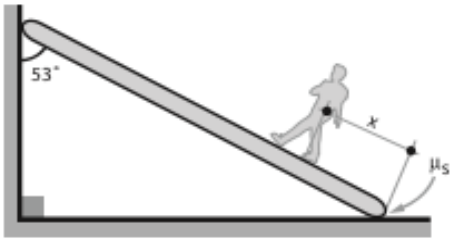
Rpta. 3000 [N]

7. *Hallar la tensión del cable si el sistema se encuentra en equilibrio (peso de la barra = 10 N).*



Rpta. 30 N

8. *Hallar "x" máximo para que la escalera no resbale. Peso escalera = 200 N ; Peso persona = 500 N Longitud escalera = 4 m ; μs = 0,8*



Rpta. 2,56 cm

UNIDAD VI HIDROSTÁTICA

Definición

Es la a parte de la mecánica que estudia a los fluidos en reposo; ese término se emplea en general para estudiar los fluidos en reposo.

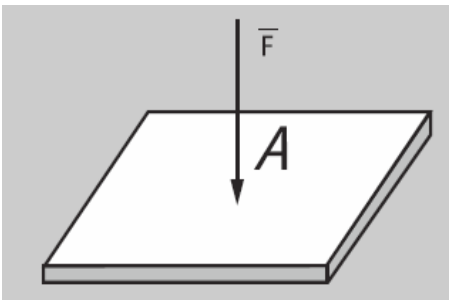
Características de los fluidos

Los fluidos son sustancias que pueden fluir, en este capítulo se estudia tanto los líquidos como los gases. En la estática de los fluidos se presume que el fluido y los demás objetos pertinentes, tales como el recipiente que lo contiene están en reposo. Sin embargo los fluidos que existen en la naturaleza poseen movimiento en su interior debido al roce interno o viscosidad; esto dificulta el estudio de los fluidos, motivo por el cual se estudiará a los fluidos ideales es decir, aquellos en los cuales no existe ningún tipo de viscosidad.

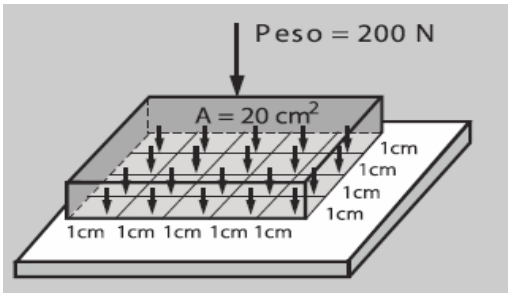
Presión (P)

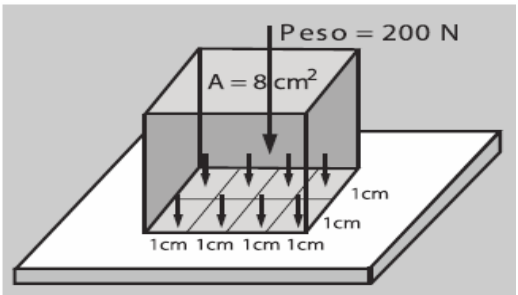
Es una magnitud tensorial, cuyo módulo mide la distribución de una fuerza sobre la superficie en la cual actúa. Su fórmula se define de la siguiente manera:

$$P = \frac{F}{A}$$



Según la fórmula se puede establecer que la presión es inversamente proporcional al área o superficie en donde se aplica la fuerza, a continuación se presenta un ejemplo de la proporcionalidad entre la Presión y la Superficie





$$P = \frac{200\ N}{20\ cm^2} = 10\ N/cm^2$$

A mayor área, menor presión

$$P = \frac{200\ N}{8\ cm^2} = 25\ N/cm^2$$

A menor área, mayor presión

Unidades de Presión

La presión se mide en Pascales (Pa) que resulta de la razón entre la unidad de fuerza y la unidad de superficie; es decir:

$$\frac{N}{m^2} = Pa$$

La presión se puede medir también en: bares, atmósferas, psi, cm(Hg), Torricellis a continuación se presentan algunos factores de conversión:

1 atm = 1,013 x 10^5 Pa

1 bar = 10^5 Pa

1 atm = 76 cm(Hg)

1 psi = 6894,76 Pa

1 torr = 133 Pa

Otros conceptos fundamentales que se utilizan en la hidrostática y la hidrodinámica son el de densidad y peso específico, los mismos que se presentan a continuación:

Densidad (δ)

Es una magnitud escalar, cuyo valor se define como la masa de un cuerpo dividida por la unidad volumen; es decir:

$$\delta = \frac{m}{V}$$

Unidades

$$\frac{Kg}{m^3}\ ;\ \frac{gr}{cm^3}\ ;\ \frac{lb}{ft^3}$$

Densidad Relativa (δr)

Se define como la relación que existe entre la densidad de una substancia cualesquiera y la de ootra que se estableco como patrón o referencia. Generalmente la sustancia que se toma como patrón es la densidad del agua cuyo valor el siguiente:

$$\delta_{H2O} = 1\ {}^{gr}/_{cm^3}$$

$$\delta_{H2O} = 1000\ {}^{Kg}/_{m^3}$$

La densidad relativa de una sustancia es una magnitud adimensional y su valor es el mismo que el de la densidad, medida en gr/cm^3.

Tabla de densidades de algunas sustancias

Sustancia o Material	Densidad (gr/cm^3)
Aire	0.0012
Etanol	0.81
Benceno	0.90
Hielo	0.92
Agua	1.0
Agua de mar	1.03
Sangre	1.06
Gliserina	1.26
Hormigón	2.0
Aluminio	2.7
Hierro - Acero	7.8
Latón	8.6
Cobre	8.9
Plata	10.5
Plomo	11.3
Mercurio	13.6
Oro	19.3
Platino	21.4

Peso Específico (γ)

Es la magnitud escalar cuyo valor se define como el peso de un cuerpo por cada unidad de volumen.

$$\gamma = \frac{W}{V}$$

Unidades

$$\frac{N}{m^3}\ ;\ \frac{Dina}{cm^3}\ ;\ \frac{lbf}{ft^3}$$

Ejercicios resueltos

1) Hallar el volumen y la densidad de una esfera de 10 cm de radio y 5 Kg de masa.

Datos

r = 10 cm
m = 5000 g
V = ??
δ = ??

Volumen de una esfera

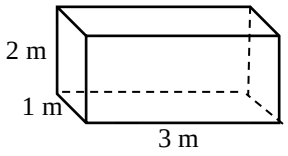
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$V = \frac{4}{3}\pi(10cm)^3$$
$$V = 4188.79\ cm^3$$

Densidad

$$\delta = \frac{m}{V}$$
$$\delta = \frac{5000\ gr}{4188.79\ cm^3}$$
$$\delta = 1.19\ \frac{gr}{cm^3}$$

2) El bloque de la figura tiene una densidad de 3.2 gr/cm^3. Determinar:

a) El peso del cuerpo
b) La presión que ejerce el cuerpo sobre el piso



Datos

δ = 3.2 gr/cm^3

W = ??
P = ??

Cálculo de la presión

$$P = \frac{W}{A}$$

$$P = \frac{188160\ N}{(1m)(3m)}$$

$$P = \frac{188160\ N}{3m^2}$$

$$P = 62720\ Pa$$

Volumen de la figura

$$V = l\ x\ a\ x\ h$$
$$V = (300cm)(100cm)(200cm)$$
$$V = 6000000\ cm^3$$

Cálculo de la masa del cuerpo

$$\delta = \frac{m}{V}$$
$$m = \delta\ V$$
$$m = (3.2\ \frac{gr}{cm^3})(6000000cm^3)$$
$$m = 19200000\ gr$$
$$m = 19200\ Kg$$

Cálculo del peso

$$W = m\ g$$
$$W = (19200Kg)(9.8\ m/s^2)$$
$$W = 188160\ [N]$$

3) 0.5 kg de alcohol etílico ocupan un volumen de 0.000544 metros cúbicos. Calcular:
a) ¿La densidad del alcohol etílico?
b) ¿Cuál es su peso específico?

Datos

m = 0.5 kg

V = 0.000544 m^3

δ = ??

γ = ??

Densidad

$$\delta = \frac{m}{V}$$

$$\delta = \frac{0.5\ Kg}{0.000544\ m^3}$$

$$\delta = 919.11\ \frac{Kg}{m^3}$$

Peso Específico

$$\gamma = \frac{w}{V}$$

$$\gamma = \frac{mg}{V}$$

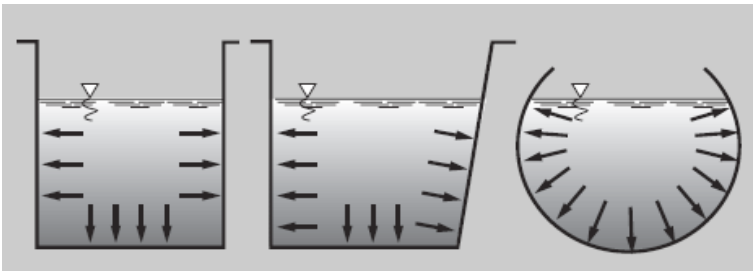
$$\gamma = \frac{(0.5Kg)(9.8\frac{m}{s^2})}{0.000544m^3}$$

$$\gamma = 90007.35\ \frac{N}{m^3}$$

Presión Hidrostática (P)

Es la presión que ejerce un líquido sobre cualquier cuerpo sumergido en el y sobre todas las paredes del recipiente que lo contiene.

Esta presión existe debido a la acción de la gravedad sobre el líquido; se caracteriza por actuar en todas las direcciones y por ser perpendicular a la superficie del cuerpo sumergido.

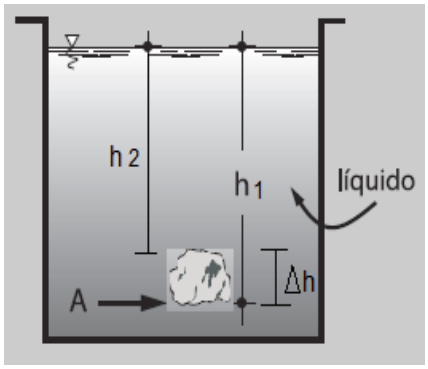


Descripción gráfica de la forma en que actúa la presión sobre los recipientes

La diferencia de presiones hidrostáticas entre dos puntos pertenecientes a un mismo líquido,
que se encuentran a diferentes profundidades,es igual al peso específico del líquido por la diferencia de profundidad".

Sean los punto A y B del recipiente en donde la presión es directamente proporcional a la profundidad, se tiene que:

$P_A = \delta\, g\, h_A$ y $P_B = \delta\, g\, h_B$



Si restamos las dos presiones, se obtiene una diferencia de presión; de la siguiente manera:

$$P_A - P_B = \delta\, g\, h_A - \delta\, g\, h_B$$

$$P_A - P_B = \delta\, g\, (h_A - h_B)$$

Finalmente se obtiene

$$\Delta P = \delta\, g\, \Delta h$$

Unidades de Presión

Si la densidad se mide en (Kg/m^3),
la gravedad en (m/s^2) y
la variación de altura en (m),
entonces la presión hidrostática se mide en Pascales.

$$\frac{N}{m^2} = Pa$$

Ejercicios resueltos

---

1) Calcular la profundidad a la que debe sumergirse un submarino para soportar una presión hidrostática igual a la presión atmosférica.
Densidad del agua de mar = 1 200 kg/m3
Presión atmosférica = 100 000 N/m2 ; g = 10 m/s2

Datos
δ = 1200kg/m^3
P = 1.03 x 10^5 Pa
h = ??

$$P = \delta\, g\, h$$

$$h = \frac{P}{\delta\, g}$$

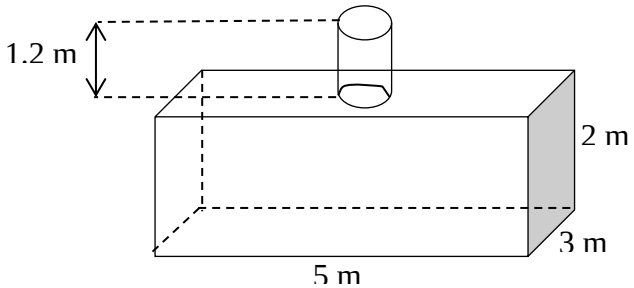
$$h = \frac{1.013 \times 10^5\ N/m^2}{(1200\, Kg/m^3)(9.8\, m/s^2)}$$

$$h = 8.61\, m$$

---

2) El tanque que se muestra en la figura, esta totalmente lleno de aceite vegetal, si la sección circular de la parte superior tien un radio de 17.8 cm, Calcular:

a) La presión hidrostática en cada una de las caras del tanque
b) La fuerza en cada una de las caras del recipiente



Datos

δ = 920 kg/m^3
r = 0.178 m

Presión en el fondo

$P = \delta\ g\ h \qquad h = 1.2m + 2m = 3.2\ m$

$$P = \left(920\frac{Kg}{m^3}\right)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(3.2m)$$

$$P = 28851.2\ Pa$$

Presión en las caras laterales

$P = \delta\ g\ h \qquad h = 1.2m + 1m = 2.2\ m$

$$P = \left(920\frac{Kg}{m^3}\right)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(2.2m)$$

$$P = 19835.2\ Pa$$

Presión en la tapa

$P = \delta\ g\ h \qquad h = 1.2m$

$$P = \left(920\frac{Kg}{m^3}\right)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(1.2m)$$

$$P = 10819.2\ Pa$$

Cálculo de la fuerza en las caras del recipiente

En el fondo el área es:

$A = b \times h$
$A = 5m \times 3m$
$A = 15\ m^2$

Despejando la fuerza nos queda

$F = P \times A$

$$F = 28851.2\ \frac{N}{m^2} \times 15m^2$$

$$F = 432768\ N$$

En la cara lateral, el área es:

$A = b \times h$

$A = 2m \times 3m$

$A = 6\ m^2$

$F = P \times A$

$F = 19835.2\ \frac{N}{m^2} \times 6m^2$

$F = 119011.2\ N$

En la cara frontal, el área es:

$A = b \times h$

$A = 2m \times 5m$

$A = 10\ m^2$

$F = P \times A$

$F = 19835.2\ \frac{N}{m^2} \times 10m^2$

$F = 198352\ N$

En la tapa el área es:

$A = Ab - \pi\ r^2$

$A = 15\ m^2 - 3.14\ (0.178m)^2$

$A = \ 15m^2 - 0.10m^2$

$A = \ 14.9m^2$

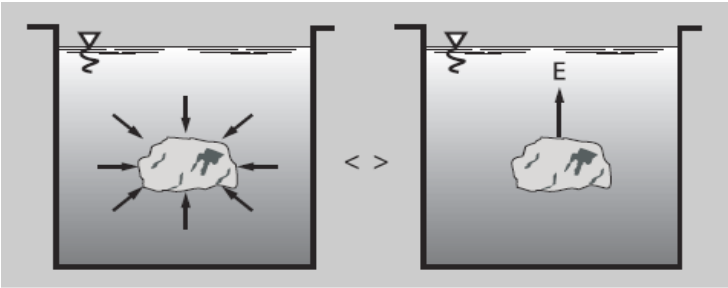
$F = P \times A$

$F = 10819.2\ \frac{N}{m^2} \times 14.9m^2$

$F = 161206.08\ N$

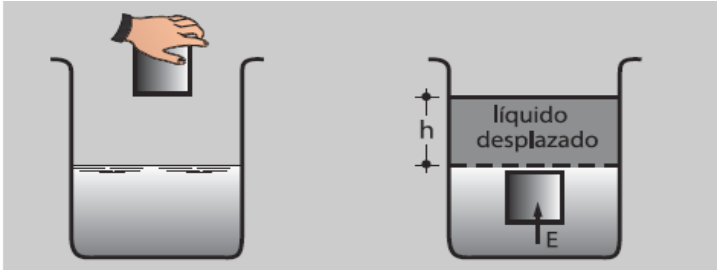
Empuje

Es la resultante de todas las fuerzas que un líquido aplica a un cuerpo sumergido en el.



Principio de Arquímides

"Si un cuerpo está sumergido parcial o totalmente en un líquido, la fuerza de empuje que el líquido le aplica es igual al peso del volumen del líquido desplazado".



Matemáticamente el principio de Arquímides queda definido de la siguiente manera.

$$Empuje = peso\ del\ líquido\ desalojado$$

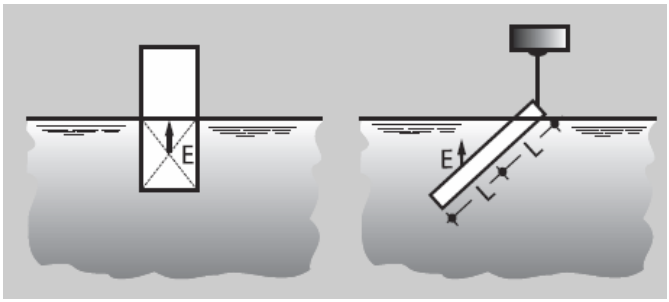
$$E = \delta_L\ g\ V_s \qquad\qquad E = W_R - W_a$$

Unidades del Empuje

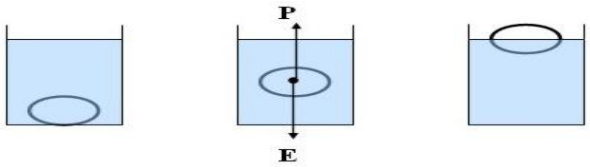
Como ya se indicó, el Empuje es una fuerza, por lo tanto se puede medir en: Newton [N], Dinas, Kilopondios (Kp), etc.

Características del empuje

1) El empuje actúa siempre en el centro de gravedad del cuerpo sumergido se lo representa con un vector dirigido hacia arriba, es decir contrario al peso, de la siguiente manera.

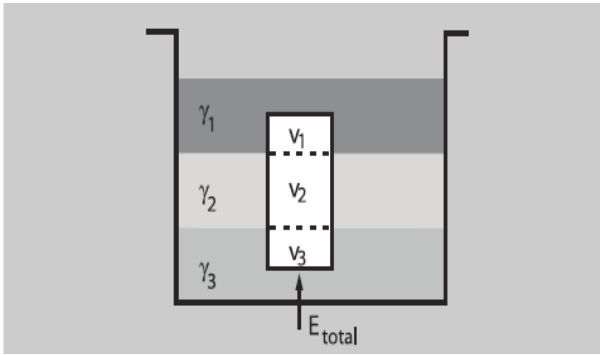


2) Según el peso de un cuerpo, éste puede sumergirse totalmente, quedar a media agua o en la superficie.



W > E **W = E** **W < E**

3) En el caso que un cuerpo esté sumergido total o parcialmente en varios líquidos no miscibles, el empuje se obtiene sumando los empujes parciales que ejerce cada uno de los líquidos.



$$E_{total} = E_1 + E_2 + E_3$$

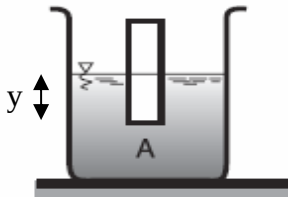
$$E_{total} = \delta_L g V_1 + \delta_L g E_2 + \delta_L g E_3$$

Ejercicios resueltos

1) Un cubo de acero de 10 cm de arista, flota en mercurio; calcular la altura de la arista del cubo que se sumerge.
(δ_{Hg} = 13 600 kg/m^3, δ_{acero} = 7 800 kg/m^3).

Datos

$h = 0.10\ m$
δ_{Hg} = 13 600 kg/m^3
δ_{acero} = 7 800 kg/m^3
y = ??



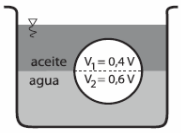
$$W = E$$
$$m_c\ g = \delta_L\ g\ V_s$$
$$\delta_c\ V_c = \delta_L\ A_b\ y$$
$$\delta_c\ A_b\ h = \delta_L\ A_b\ y$$
$$\delta_c\ h = \delta_L\ y$$
$$y = \frac{\delta_c\ h}{\delta_L}$$

$$y = \frac{7800\ kg/m^3\ \ 0.10\ m}{13600\ \ kg/m^3}$$
$$y = 0.0574\ m$$
$$y = 5.74\ cm$$

2) Calcular la densidad de la esfera, sabiendo que flota entre dos líquidos no miscibles; el volumen sumergido en agua es el 60% de su volumen total.

Datos

Δ_{aceite} = 800 kg/m^3
δ_{agua} = 1000 kg/m^3
δ_c = ??
$V_1 = 0.4\ V_c$
$V_2 = 0.6\ V_c$



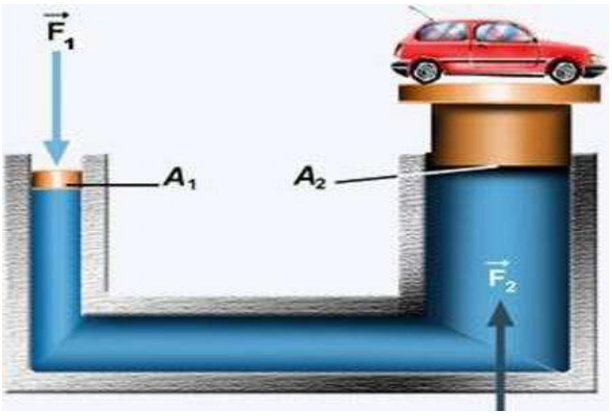
$$E_{aceite} + E_{agua} = W$$
$$\delta_1\ g\ V_1 + \delta_2\ g\ V_2 = mg$$
$$\delta_1\ V_1 + \delta_2\ V_2 = \delta_c\ V$$
$$800(0.4V_c) + 1000(0.6\ V_c) = \delta_c\ V$$
$$\delta_c\ = 320 + 600$$
$$\delta_c\ = 920\ Kg/m^3$$

Principio de Pascal

Es una ley enunciada por el físico-matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) que se resume asi: "la presión ejercida sobre un fluido incompresible y en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y en todos los puntos del fluido"

Una aplicación de este principio es la conocida prensa hidráulica, que consiste en dispositivo en forma U con 2 émbolos de diferecte sección dentro del cual se introduce un fluido de densidad δ.

De acuerdo a la figura que se muestra, matemáticamente el principio de Pascal se resume de la siguiente manera.



$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Ejercicio resuelto

1) Una gata hidráulica tiene dos pistones de diámetro 1 y 5 cm ¿Cuál es la fuerza necesaria en el pistón pequeño para que el grande levante un objeto de 10 N?.

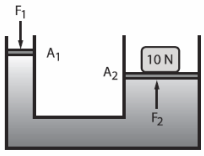
Datos

r_1 = 0.5 cm

r_2 = 2.5 cm

F_1 = ??

F_2 = 10 N



$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\frac{F_1}{\pi {r_1}^2} = \frac{F_2}{\pi {r_2}^2}$$

$$\frac{F_1}{(0.5cm)^2} = \frac{10\ N}{(2.5\ cm)^2}$$

$$F_1 = \frac{10\ N\ (0.5cm)^2}{(2.5\ cm)^2}$$

$$F_1 = 0.4\ N$$

TAREA Nº 11: Resuelva los siguientes ejercicios

1. *Un hombre que pesa 820 N se encuentra de pies. Las suelas de sus zapatos cubren cada una un área igual 196 cm^2 ¿Qué fuerza ejerce el hombre sobre el piso?, ¿Qué presión ejerce sobre el piso?, ¿cuál será la presión si se para sobre un solo pié?*

   Rpta. 820 [N]; 2.09 x 10^4 Pa; 4.18 x 10^4 Pa

2. *Un tapón de goma cilíndrico cuya base tiene 1.2 cm de radio se introduce en una botella llena de agua ejerciendo sobre el una fuerza de 300N. Calcular la presión en las paredes de la botella.*

   Rpta. 6.63 x 10^5 Pa

3. *Cuál es la presión a una profundidad de 1200 m bajo el agua y cuál es la fuerza ejercida sobre la cara superior de un cubo de 2 cm de arista situado a esa altura?.*

Rpta. 1.176 x 10^7 Pa; 4704 [N]

4. *Un tanque rectangular lleno de agua tiene 6 m de largo, 4 m de ancho y 5 m de profundidad. Calcular la fuerza total sobre el fondo y sobre cada pared.*

Rpta. 1.176 x 10^6[N]; 5.88 x 10^5[N]; 4.9 x 10^5[N]

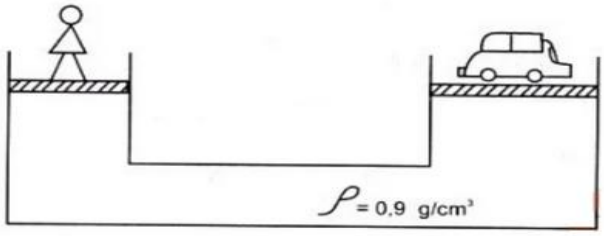
5. *Una esfera de platino pesa 3.30 [N] en el aire, 3.15 [N] en el agua y 3.03 [N] en el ácido sulfúrico. Halle: a) El volumen de la esfera; b) La densidad del ácido*

Rpta. 15.3 cm^3; 1800 Kg/m^3

6. *Un bloque de madera cuyas dimensiones son 20 x 10 x 6 cm flota en el agua con su superficie mayor horizontal. Si su densidad es 0.7 g/cm^3. ¿Cuánto se hunde?, ¿cuánto se hundiría si se le empujara con el dedo con una fuerza de 2N?*

Rpta. 4.2 cm; 5.2 cm

7. *En la prensa hidráulica que se muestra en la figura se mantiene en equilibrio una persona de 65 Kg con un automóvil de 800 Kg. Si el área del pistón pequeño es 30 cm^2, determinar:*
    a. *El área del pistón mayor*
    b. *Qué peso se debe añadir al pistón pequeño para que el auto suba una distancia de 20 cm.*



Rpta. 369 cm^2; 540 gr

UNIDAD VII HIDRODINÁMICA

Definición

Es la a parte de la mecánica que estudia a los fluidos en movimiento; por ejemplo las corrientes de agua, el transporte de un líquido por una tubería, el movimiento del viento.

Para el estudio de los fluidos en movimiento, se considerará que estos son *ideales* y tienen como característica ser: estables, irrotacionales, incompresibles y no viscosos.

Fluido Estable

El movimiento de un fluido se considera como estable o estacionario cuando cada partícula que pasa por determinada posición siempre tiene la misma velocidad de las precedentes en esa posición.

Fluido Irrotacional

Quiere decir que las partículas del fluido en su movimiento únicamente tiene traslación es decir no gira ni rota.

Fluido Incompresible

Los fluidos en su movimiento mantienen constante el valor de su densidad.

Fluido Viscoso

Hace referencia a que en el movimiento del fluido no hay rozamiento entre las diferentes capas del fluido, ni rozamiento del fluido con las paredes de las tuberías que lo conducen.

Gasto o Caudal

Cuando un fluido pasa a través de una tubería de sección determinada se dice que el fluido tiene un *Caudal*, cuyo valor es igual al volumen del líquido transportado en la unidad de tiempo.

$$Q = \frac{V}{\Delta t}$$

El volumen en un tiempo determinado es igual al área de la sección transversal de la tubería multiplicado por el desplazamiento del líquido en dicho tiempo, así:

$$Q = \frac{A\,\Delta x}{\Delta t}$$

Pero si consideramos que el fluido se desplaza uniformemente, tenemos:

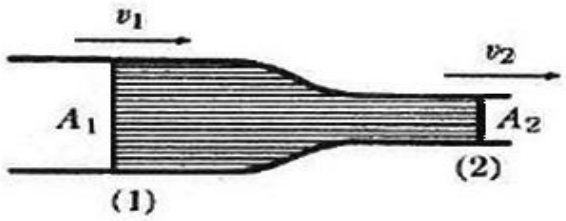
$$Q = A\,v$$

Las unidades de medida del caudal son:

$$\frac{m^3}{h}\;;\;\frac{cm^3}{s};\frac{ft^3}{min};\frac{l}{min}$$

Principio de Continuidad

Cuando un fluido circula a través de una tubería se establece este pricipio, el mismo que resulta de la ley de la conservación de la masa y que a su vez se relaciona directamente con el principio de conservación de energía, este pricipio manifiesta que: "el caudal que ingresa en una sección de la tubería es igual al caudal que sale por otra sección de la misma"

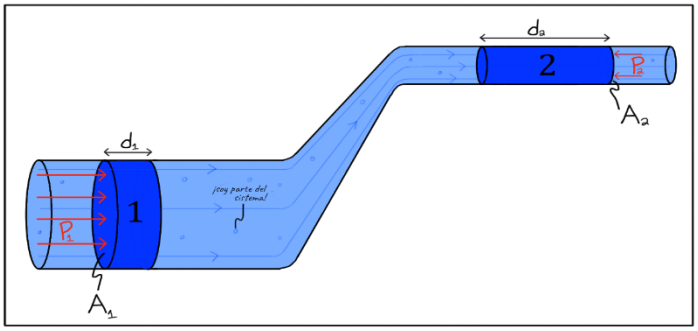


$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Principio de Bernoulli

Dentro de un flujo horizontal de fluido, los puntos de mayor velocidad del fluido tendrán menor presión que los de menor velocidad.



$$\boldsymbol{P_1 + \frac{1}{2}\delta {V_1}^2 + \delta g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\delta {V_2}^2 + \delta g h_2}$$

Ejercicios resueltos

1) Una gata hidráulica tiene dos pistones de diámetro 1 y 5 cm ¿Cuál es la fuerza necesaria en el pistón pequeño para que el grande levante un objeto de 10 N?.

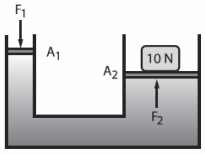
Datos

$r_1 = 0.5$ cm

$r_2 = 2.5$ cm

$F_1 = ??$

$F_2 = 10$ N



$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\frac{F_1}{\pi {r_1}^2} = \frac{F_2}{\pi {r_2}^2}$$

$$\frac{F_1}{(0.5cm)^2} = \frac{10\ N}{(2.5\ cm)^2}$$

$$F_1 = \frac{10\ N\ (0.5cm)^2}{(2.5\ cm)^2}$$

$$F_1 = 0.4\ N$$

BIBLIOGRAFÍA

BÁSICA

- Vallejo, P.-Zambrano, J. (2010), Física Vectorial, Tomo 1, (7 ed), Ecuador, RODIN.
- Vallejo, P.-Zambrano, J. (2011), Física Vectorial, Tomo 2, (8 ed.), Ecuador, RODIN
- Dueñas Mendoza, J. (2002), FÍSICA, (8 ed.), Perú, Terra

COMPLEMENTARIA

- Tippens, P. (2011),Fisica Conceptos y Aplicaciones, (6 ed.). McGraw-Hill.
- Young, H. y Freedman,r. (2009) Física Universitaria,Volumen 1, (12 ed.), Mexico, Pearson Educación.
- Bueche,F.(2004), Física General, (9 ed.), Mexico, SCHAUM. McGraw-Hill.

ANEXOS

Anexo 1 FACTORES DE CONVERSIÓN

MASA

1g = 10^{-3} kg = $6.85x10^{-5}$ slug
1kg = 10^{3} g = $6.85x10^{-2}$ slug
1 slug = $1.46x10^{4}$ g = 14.6 kg
1 u = $1.66x10^{-24}$ g = $1.66x10^{-27}$ kg
1 tonelada métrica = 1000 kg

LONGITUD

1 cm = 10^{-2} m = 0.394 in
1 m = 10^{-3} km = 3.28 ft = 39.4 in
1 km = 10^{3} m = 0.62 millas
1 in = 2.54 cm = $2.54x10^{-2}$ m
1 ft = 12 in = 30.48 cm = 0.3048 m
1 milla = 5280 ft = 1609 m = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm

ÁREA

1 cm^2 = 10^{-4} m^2 = 0.1550 in^2 = $1.08x10^{-3}$ ft^2
1 m^2 = 10^{4} cm^2 = 10.76 ft^2 = 1550 in^2
1 in^2 = $6.94x10^{-3}$ ft^2 = 6.45 cm^2 = $6.45x10^{-4}$ m^2
1 ft^2 = 144 in^2 = $9.29x10^{-2}$ m^2 = 929 cm^2

VOLUMEN

1 cm^3 = 10^{-6} m^3 = $3.53x10^{-5}$ ft^3 = $6.1x10^{-2}$ in^3
1m^3 = 10^{6} cm^3 = 10^{3} litros = 35.3 ft^3 = $6.1x10^{4}$ in^3 = 264 galones
1 litro = 10^{3} cm^3 = 10^{-3} m^3 = 1.506 cuartos = 0.264 galones
1 in^3 = $5.79x10^{-4}$ ft^3 = 16.4 cm^3 = $1.64x10^{-5}$ m^3
1 ft^3 = 1728 in^3 = 7.48 galones = 0.0283 m^3 = 28.3 litros
1 cuarto = 2 pintas = 946.5 cm^3 = 0.947 litros
1 galón = 4 cuartos = 231 in^3 = 3.758 litros

FUERZA

1 N = 10^{5} dinas = 0.225 lbf
1 dina = 10^{-5} N = $2.25x10^{-6}$ lb
1 libra = $4.45x10^{5}$ dinas = 4.45 N
Peso equivalente a 1 kilogramo masa = 2.2 lb = 9.8 N

PRESIÓN

1 Pascal (N/m^2) = $1.45x10^{-4}$ lb/in^2 = $7.5x10^{-3}$ torr (mm Hg) = 10 dinas/cm^2
1 torr (mm Hg) = 133 Pa (N/m^2) = 0.02 lb/in^2 = 1333 dinas/cm^2
1 atm = 14.7 lb/in^2 = $1.013x10^{5}$ N/m^2 = $1.013x10^{6}$ dinas/cm^2 = 30 in Hg = 76 cm Hg
1 bario = 10^{6} dinas/cm^2 = 10^{5} Pa
1 milibario = 10^{3} dinas/cm^2 = 10^{2} Pa

ENERGÍA

1 J = 10^{7} ergios = 0.738 ft-lb = 0.239 cal = $9.48x10^{-4}$ Btu = $6.24x10^{18}$ eV
1 kcal = 4186 J = $4.186x10^{10}$ ergios = 3.968 Btu
1 Btu = 1055 J = $1.055x10^{10}$ ergios = 778 ft-lb = 0.252 kcal
1 cal = 4.186 J = $3.97x10^{-3}$ Btu = 3.09 ft-lb
1 ft-lb = 1.36 J = $1.36x10^{7}$ ergios = $1.29x10^{3}$ Btu
1 eV = $1.6x10^{-19}$ J = $1.6x10^{-12}$ ergios
1 Kwh = $3.6x10^{6}$ J
1 fotón = $4.42x10^{-12}$ ergios

POTENCIA

1W = 0.738 ft-lb/seg = $1.34x10^{-3}$ hp = 3.41 Btu/h
1 ft-lb/seg = 1.36 W = $1.82x10^{-3}$ hp
1 hp = 550 ft-lb/seg = 745.7 W = 2545 Btu/h

TIEMPO

1 h = 60 min = 3600 seg
1 día = 24 h = 1440 min = 8.64×10^4 seg
1 año = 365 días = 8.76×10^3 h = 5.26×10^5 min = 3.16×10^7 seg

ÁNGULO

1 rad = 57.3°
1° = 0.0175 rad 15° = π/12 rad
30° = π/6 rad 45° = π/4 rad
60° = π/3 rad 90° = π/2 rad
180° = π rad 360° = 2π rad
1 revolución/min = π/30 rad/seg = 0.1047 rad/seg

VELOCIDAD

2 m/s = 3.6 km/h = 3.28 ft/s = 2.24 millas/h
1 km/h = 0.278 m/seg = 0.621 mi/h = 0911 ft/seg
1 ft/s = 0.682 mi/h = 0.305 m/s = 1.1 km/h
1 mi/h = 1.467 ft/s = 1.609 km/h = 0.447 m/s
60 mi/h = 88 ft/s

Equivalentes Energía-Masa (en reposo)

1 u = 1.66×10^{-27} kg ↔ 931.5 MeV
1 electrón masa = 9.11×10^{-31} kg = 5.49×10^4 u ↔ 0.511 MeV
1 protón masa = 1.672×10^{-31} kg = 1.007276 u ↔ 9.38.28 MeV
1 neutrón masa = 1.674×10^{-27} kg = 1.008665 u ↔ 9.39.57 MeV

TEMPERATURA

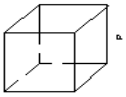
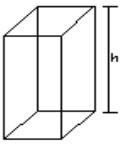
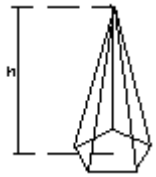
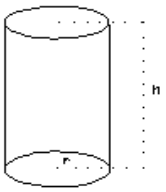
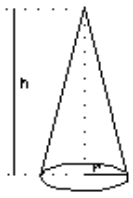
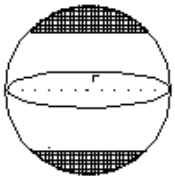
$T_F = 9/5(T_C + 32)$

$T_C = 5/9(T_F - 32)$

$T_K = T_C + 273.16$

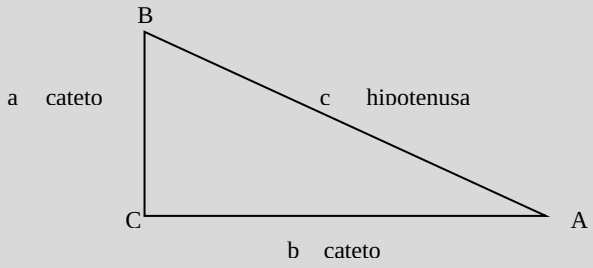
FUENTE: Física Jerry D. Wilson

Anexo 2: Cuerpos Geométricos

FIGURA	CONCEPTO	ÁREA LATERAL	ÁREA TOTAL	VOLUMEN
EL CUBO 	**El Cubo**: Es un cuerpo geométrico, limitado por seis caras planas cuadrangulares congruentes y paralelas de dos en dos.	$A_L = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
EL PRISMA RECTO 	**El Prisma Recto**: Es un cuerpo geométrico limitado por caras planas rectangulares, cuyas bases son dos polígonos paralelos y congruentes.	$A_L = P \cdot h$	$A_T = A_L + 2A_b$	$V = A_b \cdot h$
LA PIRÁMIDE RECTA 	**La Pirámide Recta:** Es un cuerpo geométrico formado por un polígono como base y por varias caras triangulares cuyos vértices concurren a la cúspide de la pirámide.	$A_L = \frac{(b \cdot h)}{2} \cdot n$ n = número de caras triangulares	$A_T = A_L + A_b$	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
EL CILINDRO CIRCULAR 	**El Cilindro:** Es un cuerpo geométrico limitado, por una superficie cilíndrica y por dos planos paralelos circulares intersecantes con la generatriz.	$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ o $A_L = \pi \cdot D \cdot h$	$A_T = A_L + 2A_b$	$V = A_b \cdot h$ o $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
EL CONO CIRCULAR RECTO 	**El Cono:** Es un cuerpo geométrico limitado por una superficie cónica cerrada y un plano circular que no contiene el vértice y es intersecante, con todas las generatrices.	$A_L = \pi \cdot r \cdot g$ g es la generatriz.	$A_T = A_L + A_b$	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
LA ESFERA 	**La Esfera:** Es un cuerpo de revolución limitada por una superficie curva cerrada y generada por la rotación de un semicírculo alrededor del diámetro.		$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Anexo 3: Funciones trigonométricas

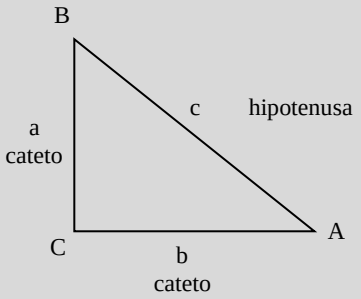
Teorema de Pitágoras



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Relaciones trigonométricas



$$Seno\,de\,A = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} \qquad Sen A = \frac{a}{c}$$

$$Coseno\,de\,A = \frac{cateto\,adyacente}{hipotenusa} \qquad Cos A = \frac{b}{c}$$

$$Tangente\,de\,A = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente} \qquad Tg\ A = \frac{a}{b}$$

$$Co\tan gente\,de\,A = \frac{cateto\,adyacente}{cateto\,opuesto} \qquad Ctg A = \frac{b}{a}$$

$$Secante\,de\,A = \frac{hipotenusa}{cateto\,adyacente} \qquad Sec A = \frac{c}{b}$$

$$Co\sec ante\,de\,A = \frac{hipotenusa}{cateto\,opuesto} \qquad Csc A = \frac{c}{a}$$

Funciones trigonométricas de los ángulos de 30° - 45° - 60°

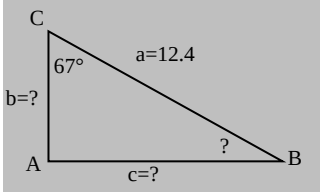
Angulo	Sen	Cos	Tan	Ctg	Sec	Csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Anexo 4: Resolución de tringulos rectángulos

Resolver un triángulo significa encontrar el valor númerico de cada uno de sus lados y sus ángulos, al conocer algunos de ellos.

Cuando se trata de resolver un triángulo rectángulo, se pueden presentar los siguientes casos:

1° Caso: Si se conocen un lado y un ángulo



Como se puede ver debemos hallar el valor de los lados b, c y además el ángulo B

Los ángulos agudos suman 90° por lo tanto.

$\measuredangle B = 90° - 67°$

$\measuredangle B = 23°$

Para hallar c utilizamos la función seno:

$Sen67° = \frac{c}{12.4}$

Despejando c nos queda

$c = (12.4)Sen67°$

$c = 11.41$

Para hallar b utilizamos la función coseno:

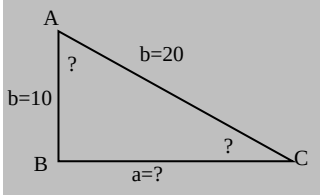
$Cos67° = \frac{b}{12.4}$

Despejando b nos queda

$b = (12.4)Cos67°$

$b = 4.84$

2° Caso: Si se conocen dos lados



Como se puede ver debemos hallar el valor del lado a y además los ángulos agudos A y C.

Utilizando Pitágoras hallamos el valor del cateto a:

$a = \sqrt{20^2 - 10^2}$

$a = 17.32$

Para hallar el ángulo A utilizamos la función coseno:

$CosA = \frac{10}{20}$

$A = Cos^{-1}(0.5)$

$A = 60°$

Para hallar el ángulo C simplemente restamos el ángulo A de 90°

$C = 90° - 60°$

$C = 30°$

INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO COTOPAXI
¡Transformando la Educación Superior!

FICHA DE VALIDACIÓN DE GUÍA DE ESTUDIO DE LA ASIGNATURA Abril - Agosto 2024 (2024-1P)			
Carrera:	ELECTROMECANICA		
Nombre del jefe de área	Hernán Garzón Vaca	**Área**	Física y Matemática
Nombre del coordinador	Ing. Diego López	**Asignatura**	Cálculo
Nombre de docente responsable elaboración Guía de estudio	Hernán Garzón	**Código de la asignatura**	CEM-101

INDICADORES QUE SON NECESARIOS QUE SE CONSIDEREN EN LA GUÍA DES ESTUDIO PARA QUE ALCANCEN SU VALIDACIÓN PARA LA COBERTURA BIBLIOGRÁFICA				
COMPONENTES DE LA GUÍA DE ESTUDIO		**SI**	**NO**	**Observaciones complementarias de mejora a considerar para alcanzar la calidad del componente.**
1	**Datos preliminares**			
a	Logotipo institucional Instituto Superior Tecnológico Cotopaxi, nombre de la asignatura, denominación "Guía de estudio" y nombre del autor.	☑	☐	
b	Cambio de datos según la carrera, asignaturas y códigos en la segunda página de la guía de estudio.	☑	☐	
c	Formato Normas APA 7: márgenes 2,54 en cada lado, tipografía Times New Roman 12, espaciado 1,5.	☑	☐	
d	Índice.	☑	☐	
e	Introducción.	☑	☐	
f	Cada una de las unidades del PEA de la asignatura está desarrollada en la Guía de estudio.	☑	☐	
g	Formato Normas APA 7: tablas y figuras según Manual de estilo institucional.	☑	☐	
h	Citación Normas APA 7: uso correcto de citas textuales y paráfrasis parentéticas y narrativas.	☑	☐	
j	Referencias Normas 7 según Manual de estilo institucional.	☑	☐	

Jefe de área
Firma responsable validador guía de estudio

Coordinador de carrera
Firma responsable validador guía de estudio

Instituto Superior Universitario Cotopaxi
Parroquia Tanicuchí Panamericana
E35 km. 12 vía Latacunga - Quito